

ENTWICKLUNGSZUSTAND UND PULSATIONSEIGENSCHAFTEN VON R CORONA BOREALIS-STERNEN

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität, München

vorgelegt von
Achim Weiß
aus Augsburg

München, den 28. Mai 1986

ENTWICKLUNGSZUSTAND UND PULSATIONSEIGENSCHAFTEN VON

R CORONA BOREALIS - STERNEN

Dissertation der Fakultät für Physik der

Ludwig-Maximilians-Universität, München

vorgelegt von

Achim Weiß

aus

Augsburg

München, den 28. Mai 1986

Erster Gutachter: Prof. Dr. Rudolf Kippenhahn

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Rolf Kudritzki

Tag der mündlichen Prüfung: 1.12.1986

Zusammenfassung

Die „kleine Gruppe der veränderlichen Sterne vom Typ R CrB stellt uns vor eine Anzahl ungelöster Probleme: wir wissen weder, warum und auf welche Weise sie von Zeit zu Zeit drastisch dunkler werden, noch, wie sie zu der außergewöhnlichen chemischen Zusammensetzung aus Helium und Kohlenstoff gelangten, noch, ob die beobachteten Pulsationen einiger R CrB-Sterne typisch oder notwendig für die ganze Klasse sind, noch, da sie Einzelsterne sind, welche Massen sie besitzen. (Weitere Probleme ließen sich anschließen.)

Zwei dieser Fragen wurden in der vorliegenden Arbeit behandelt. Durch Entwicklungsrechnungen von mit Kohlenstoff angereicherten Helium-Sternen, ausgehend von verschiedenen Ansätzen der früheren Entwicklung des Vorgängers, kann der Massenbereich der Sterne, die die beobachteten Bereiche von Leuchtkraft und Effektivtemperatur erreichen, auf $0.8 \leq M/M_{\odot} \leq 0.9$ eingeschränkt werden. Besonderes Gewicht wurde dabei auf eine möglichst gute Berücksichtigung der Zusammensetzung bei der Berechnung der thermodynamischen Größen und der Opazitäten gelegt.

Die aus den Entwicklungsrechnungen erhaltenen R CrB-Modelle wurden weiterhin auf Stabilität gegen radiale Pulsationen untersucht. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen des ersten Teils der Arbeit pulsieren die Modelle des angeführten Massenbereiches mit Perioden, die den beobachteten entsprechen. Auch die abgeleiteten Periodenänderungen stimmen mit den bekannten überein. Für weitere Beobachtungen kann die Vorhersage getroffen werden, daß alle R CrB-Sterne – die heißesten ($T_{\text{eff}} \geq 12000$ K) ausgenommen – pulsieren sollten.

Aufgrund der gemeinsamen Ergebnisse der eben geschilderten Rechnungen lassen sich auch Aussagen über andere, nicht direkt behandelte Probleme treffen. So kann eine Obergrenze für permanenten Massenverlust gegeben werden (Reimers-Verlust mit $\eta \leq 1$; am wahrscheinlichsten für $T_{\text{off}} \leq 5000$ K), und ein Entstehungsszenarium für R CrB-Sterne aus zwei verschmelzenden Weißen Zwergen ausgeschlossen werden.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554808_0034

ENTWICKLUNGSZUSTAND UND PULSATIONSEIGENSCHAFTEN VON

R CORONA BOREALIS - STERNEN

Für Sabine

Inhalt:

	Zusammenfassung	
0.	Einführung	1
1.	Entwicklung	5
1.1.	Ergebnisse von Beobachtungen und früheren Arbeiten	5
1.2.	Details des verwendeten Sternentwicklungsprogramms	8
1.2.1.	Allgemein	8
1.2.2.	Ionisation	10
1.2.3.	Konvektion	11
1.2.4.	Opazitäten	14
1.2.4.1.	Die "Astrophysical Opacity Library"	14
1.2.4.2.	Elektronenstreuung und -leitung	15
1.2.4.3.	Opazitäten bei niedrigen Temperaturen	16
1.2.4.4.	Interpolation Innerhalb der Tabellen	18
1.2.4.5.	Vergleich der Opazitäten mit anderen Tabellen	19
1.2.4.6.	Zustandsgleichung	22
1.3.	Standardentwicklung	23
1.3.1.	Übersicht über die Entwicklungswege	23
1.3.2.	Einfluß der Schalenquellenstruktur	28
1.4.	Rote Riesen-Entwicklung	34
1.4.1.	Entwicklungswege	34
1.4.2.	Innerer Aufbau	39
1.5.	Entwicklung mit Massenverlust	45
1.5.1.	Modell und Einfluß auf Entwicklungswege	45
1.5.2.	Innerer Aufbau	48
1.6.	Ergänzungen	50
1.6.1.	Verallgemeinerte Hauptreihen-Modelle	50
1.6.2.	Reproduktion älterer Ergebnisse	53
2.	Pulsationen	55
2.1.	Beobachtungen und frühere Rechnungen	55
2.2.	Pulsationsprogramme	57
2.3.	Lineare Pulsationen	63
2.3.1.	Untersuchte Modelle der Rote Riesen-Entwicklung	63
2.3.1.1.	$M/M_{\odot} = 0.825$ (Mischung R1)	63
2.3.1.2.	$M/M_{\odot} = 0.800$ (R1)	77
2.3.1.3.	$M/M_{\odot} = 0.850$ (R1)	81
2.3.1.4.	$M/M_{\odot} = 0.7875$ (R2)	84
2.3.1.5.	$M/M_{\odot} = 0.8125$ (R2)	85
2.3.1.6.	$M/M_{\odot} = 0.8375$ (R2)	87

2.3.2.	Ein Stern der Standardentwicklung ($M/M_{\odot}=0.8750, R1$)	88
2.3.3.	Modelle der Entwicklung mit Massenverlust	89
2.3.4.	Zusammenfassung der Ergebnisse der Pulsations- rechnungen	91
3.	Anwendung	92
3.1.	Entwicklungszustand	93
3.2.	Massen	94
3.3.	Pulsationen	98
3.4.	Extreme Helium-Sterne	100
3.5.	Hydrogen-deficient Carbon-Stars (HdCs)	101
3.6.	Ursprung	102
3.7.	Verdunkelungen	104
3.8.	Massenverlust	105
4.	Zusammenfassung	107
5.	Anhang	
5.1.	Anhang A - Ableitungen thermodynamischer Größen	111
5.2.	Anhang B - Arbeitsintegral bei komplexer Frequenz ω	114
5.3.	Anhang C - Pulsationsrechnungen für ein Gitter von Modellen	116
	Verzeichnis der Symbole	119
	Literatur	121
	Danksagung	
	Lebenslauf	

0. Einführung

Im Sternbild Nördliche Krone (Corona Borealis) steht der Stern R CrB; seine scheinbare visuelle Helligkeit ist 5^m8 , er ist also gerade noch mit bloßem Auge sichtbar. Die meiste Zeit strahlt er mit gleichbleibender Helligkeit. Im Jahre 1783 jedoch und später noch 1796 stellte der deutsche Astronom EDUARD PIGOTT (1796) das Fehlen dieses Sterns fest. Bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts wurde R CrB immer wieder vermißt, war aber auch plötzlich wieder sichtbar. Danach erkannte man durch bessere Beobachtungen, daß er nicht wirklich verschwand, sondern seine Helligkeit innerhalb weniger Tage oder Wochen stark abnahm. Nach einigen Monaten begann er sich wieder langsam zur normalen Helligkeit zurück zu entwickeln. Damit war eine neue Klasse veränderlicher Sterne bekannt, deren Eigenart ist, daß sie über Jahre hinweg konstante Helligkeiten besitzen, plötzlich und unvorhersagbar innerhalb kurzer Zeit (Wochen bis Monate) um bis zu sieben oder acht Größenklassen schwächer werden, und sich dann im Laufe von Monaten oder Jahren wieder erholen. Zu dieser Klasse gehören außer dem Prototyp R CrB nach dem General Catalogue of Variable Stars (Kukarkin et al. 1969) 31 Objekte, jedoch ist nur bei etwa 20–25 Sternen sicher, daß sie R CrB-Sterne (im weiteren RCBs genannt) sind. Denn das Absinken der Helligkeit ist nicht mehr das einzige Kriterium für RCBs, sondern z.B. auch ihr Spektrum. Aus diesem nämlich ist zu ersehen, daß RCBs wasserstoffarme und gleichzeitig mit Kohlenstoff angereicherte Helium-Atmosphären besitzen.

Diese eigentümliche chemische Zusammensetzung legt auch den Schluß nahe, die Verdunkelungen könnten durch Wolken von Kohlenstoff-Teilchen (Ruß oder Graphit) hervorgerufen werden. Diese Hypothese wurde bereits in den dreißiger Jahren getroffen (Loreta 1934 und O'Keefe 1939) und ist bis heute zwar nicht widerlegt, aber auch nicht zweifelsfrei bestätigt worden. Ebenso unklar ist der Ursprung der RCBs, also die Frage, auf welche Weise ein gewöhnlicher Stern seinen Wasserstoff bis auf einen verschwindend kleinen Rest verlieren kann und gleichzeitig seine Hülle mit Kohlenstoff angereichert wird. Genauere spektroskopische Analysen (z.B. Cottrell und Lambert 1982) bestätigten das fast völlige Fehlen von Wasserstoff und die erhöhte Häufigkeit von Kohlenstoff, konnten aber zur Klärung der Herkunft nur wenig beitragen.

Darüber hinaus entdeckte man später (Jacchia 1933), daß einige RCBs auch fast-periodische Lichtwechsel ausführen, deren Perioden bei etwa 30–70 Tagen

und Amplituden bei etwa 0.2^m liegen. Amateurbereobachtungen lassen darauf schließen, daß dies bei fast allen RCBs der Fall ist. Diese Veränderungen werden als Pulsationen gedeutet.

Da alle bekannten RCBs Einzelsterne sind, kann ihre Masse nicht direkt aus Beobachtungen abgeleitet werden. Von theoretischer Seite bieten aber sowohl Entwicklungs-, wie auch Pulsationsrechnungen die Möglichkeit, Massen unabhängig voneinander zu bestimmen.

In dieser Arbeit sollen folgende aus der langen Liste der ungeklärten Fragen über RCBs beantwortet werden:

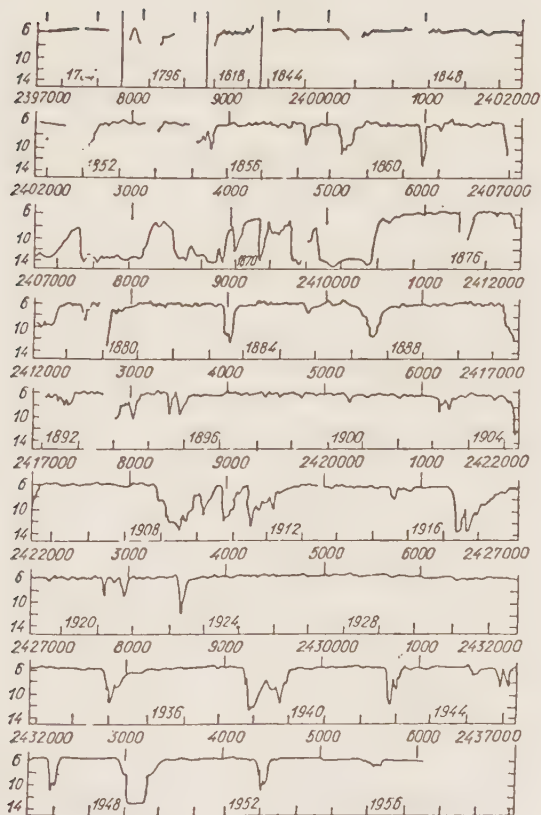
1. Durch welche Sternmodelle kann man RCBs repräsentieren? Welche Massen sind typisch?
2. Was ist Ursache für die Pulsationen, in welchen Moden schwingen RCBs, wo ist der Instabilitätsstreifen im Hertzsprung-Russel-Diagramm?
3. Sind die Antworten auf 1. und 2. konsistent?
4. Kann man daraus Schlüsse auf die anderen Probleme (Ursprung, Verdunkelungen) ziehen?

In Kapitel 1 werden die Entwicklungsrechnungen besprochen. Nach einer Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse (Abschnitt 1.1) und einer Beschreibung der wesentlichen Merkmale des Computer-Programmes (Abschnitt 1.2) folgen die Ergebnisse für die sogenannte Standardentwicklung (Abschnitt 1.3) und Rote Riesen-Entwicklung (Abschnitt 1.4), Entwicklung mit Massenverlust (Abschnitt 1.5) und einiger Ergänzungen (Abschnitt 1.6).

In Abschnitt 2.2 wird das lineare Pulsationsprogramm erläutert, danach (Abschnitt 2.3) die Ergebnisse für Perioden und Anregungsverhältnisse. Es werden hauptsächlich Modelle auf Pulsationsinstabilität untersucht, die in Kapitel 1 erhalten wurden.

Kapitel 3 diskutiert dann die für sich allein dastehenden Ergebnisse der ersten beiden Kapitel unter dem Gesichtspunkt eines konsistenten Bildes für RCBs. Aus diesen Resultaten werden auch Schlußfolgerungen für andere, nicht direkt behandelte Probleme, wie Ursprung und Verdunkelungen gezogen.

Kapitel 4 faßt noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammen.



Figur 1:

Historische Lichtkurve von R CrB (aus Shilyaev et al. 1978)

1. Entwicklung

1.1. Ergebnisse von Beobachtungen und früheren Arbeiten

Aufgrund Ihrer galaktischen Koordinaten - RCBs konzentrieren sich zum galaktischen Zentrum und zur galaktischen Ebene hin (Feast 1975) - und kleinen Eigenbewegung (Eggen 1965, Torres et al. 1985) rechnet man RCBs zur alten galaktischen Scheibenpopulation mit einem Alter von etwa $5 \cdot 10^9$ Jahren. Nach Eggen (1965) ist R CrB Mitglied der Gruppe Wolf 630, die ebenfalls dieser Population angehört. Von dieser Gruppe ausgehend erhielt er eine absolute visuelle Helligkeit von $M_V = -3^m$. Andere Autoren finden ähnliche oder niedrigere Werte für andere RCBs (Andrews et al. 1967: $M_V = -4$ für R CrB; Feast 1972: $M_V = -4 \dots -5$ für die drei bekannten RCBs in der LMC). Diese absoluten Helligkeiten entsprechen bei Vernachlässigung der bolometrischen Korrektur Leuchtkräften von $10^{3.5}$ bis $10^{3.9} L_\odot$ und sind daher typisch für Superriesen der Leuchtkraftklasse Ib. Warner (1967) findet M_{Bol} zwischen -4 und -6 , so daß $\lg L/L_\odot = 3.5 \dots 4.3$. Dürrbeck und Seitter (1982) geben $M_V = -5$ (für Spektraltypen B...K) und -3 (für Typ C). Wir können daher annehmen, daß Modelle für RCBs im theoretischen Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD) in einem Streifen liegen, der von diesen Werten begrenzt wird. Biermann und Kippenhahn (1971) nehmen als untere Grenze $\lg L/L_\odot = 3.8$, da die Helligkeitsbestimmungen eher zu den höheren Werten tendieren, doch sollte man trotzdem der Vollständigkeit halber auch niedrigere Werte nicht ganz ausschließen. Die Unsicherheit in den absoluten Helligkeiten ist beträchtlich; Sie beträgt sicherlich eine halbe Größenklasse, d.h. $\Delta \lg L/L_\odot = \pm 0.2$. Der Spektraltyp der RCBs reicht von B (MV Sgr) über F und G (R CrB, RY Sgr) bis zu R (S Aps), die Effektivtemperaturen damit nach Böhm-Vitense (1981) von etwa 16000 K über 7000 K bis zu 3500 K. Deshalb erstreckt sich der RCB-Streifen im HRD etwa von $\lg T_{\text{eff}} \approx 3.5$ bis 4.2, wobei wir $\lg T_{\text{eff}} = 3.8 \dots 3.9$ besonders beachten, da dort die am besten beobachteten Objekte R CrB, RY Sgr und XX Cam liegen.

Nachdem wir nun Effektivtemperatur und Leuchtkraft für RCB-Modelle festgelegt haben, stellt sich die Frage nach der chemischen Zusammensetzung. Schon früh (Ludendorff 1906) war bekannt, daß R CrB verstärkte Kohlenstoff- und schwache Wasserstoff-Linien im Spektrum zeigt (siehe auch Bermann 1935 und Herbig 1949). Bidelman (1948 und 1953) bemerkte gleiches bei XX Cam und die Existenz einer ganzen Klasse weiterer Sterne mit ähnlicher Zusammensetzung, die jedoch nicht-variabel waren (HdC-Sterne: Hydrogen deficient Carbon stars). Warner (1967) berichtet von 15 spektroskopisch untersuchten

RCBs, die alle diese Merkmale zeigen, ohne allerdings genauere Angaben zu machen.

Die erste genaue Analyse eines gut aufgelösten Spektrums von R CrB führte Searle (1961) durch und gelangte zu folgender Zusammensetzung (nach Massenanteilen): Wasserstoff: $X = 5 \cdot 10^{-4}$; Helium: $Y = 0.910$; Kohlenstoff: $X_C = 0.0673$; restliche Elemente: $Z = 0.0222$. Dabei wurde angenommen, daß die restlichen Elemente innerhalb Z in ihren gewöhnlichen, solaren Verhältnissen zueinander stehen.

Die drei am besten beobachteten RCBs, nämlich R CrB, RY Sgr und XX Cam wurden von Schönberner (1975) analysiert. Dabei verwendete er Spektren aus der Literatur und zur Bestimmung von Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung ein Programm für Atmosphärenrechnungen. Für alle drei Sterne erhielt er Effektivtemperaturen von 7000 ± 500 K und $\log g = 0.15 \pm 0.50$ (!). Darin wird auch die Unsicherheit in $\lg L/L_\odot$ widerspiegelt. Da das Verhältnis X_C/Y für die theoretischen Atmosphären als Parameter zu 0.09 angenommen wurde, ist der Kohlenstoffgehalt nur indirekt bestimmt worden. Klar ist aber, daß alle drei Objekte nur $X \leq 10^{-5}$ haben und Kohlenstoff nach Helium das zweithäufigste Element ist. Die anderen Elemente besitzen etwa solare Anteile.

Dieselben RCBs wurden auch von Cottrell und Lambert (1982) untersucht, die Reticon-Daten hoher Auflösung und ebenfalls Modellatmosphären benutzten. Für RY Sgr erhielten sie wegen mangelnder Daten nur grobe Aussagen aufgrund der spektralen Ähnlichkeit mit R CrB. Effektivtemperatur und Oberflächenbeschleunigung waren vergleichbar mit Schönberner (1975). Für das Verhältnis X_C/Y erhielten Cottrell und Lambert nur Grenzwerte, nämlich $0.009 \leq X_C/Y \leq 0.09$ für R CrB (bester Wert 0.012) und $0.006 \leq X_C/Y \leq 0.03$ für XX Cam (0.012). Damit läge der Kohlenstoffanteil um etwa einen Faktor sieben niedriger als bei Schönberner. Für X/Y geben die Autoren obere Grenzwerte von 10^{-6} bzw. $10^{-8.5}$. Die untersuchten Sterne sind damit praktisch wasserstofffrei. Lithium konnte nur in R CrB in kosmischer Häufigkeit nachgewiesen werden.

Bemerkenswert ist, daß das Isotopenverhältnis $^{12}\text{C}/^{13}\text{C} \geq 40$ beträgt, also viel größer ist als der Gleichgewichtswert 3.4 des CNO-Zyklus. Der Stickstoffanteil scheint in XX Cam ebenfalls erhöht zu sein. Alle anderen Elemente sind normal häufig.

Bisher gab es noch keine Rechnungen von kompletten Sternmodellen mit einer kohlenstoffreichen Heliummischung, wie sie bei RCBs typisch ist. Lediglich Heliumsterne ($X = 0.0$) mit ansonsten normaler Zusammensetzung sind untersucht worden. Paczynski (1971) und Trimble und Paczynski (1973) bestimmten die Massen, für welche Heliumsterne in das Gebiet der Roten Überriesen entwickelt werden können, wo sich die RCBs finden. Für Modelle, die sie von der Helium-Hauptreihe (homogene Heliumsterne zu Beginn des Helium-Brennens im Kern), gelang dies für $M/M_{\odot} = 1.0 \dots 2.0$. Für sogenannte statische Modelle, bei denen sie die chemische Zusammensetzung durch den Stern hindurch vorgaben (Innen Kohlenstoff-Sauerstoff-Kern, außen Heliumhülle, an deren unteren Rand die Schalenquelle brennt) erhielten sie unter Vernachlässigung von Neutrinoverlusten Lösungen im Gebiet Roter Riesen für $0.7 \leq M/M_{\odot} \leq 10$. Ein entsprechender Massenbereich von $0.7 \leq M/M_{\odot} \leq 1.2$ wurde von Bliemann und Kippenhahn (1971) gefunden, indem sie "Verallgemeinerte Hauptreihen" konstruierten. Diese Modelle ähneln den statischen, besitzen jedoch einen sprunghaften Übergang von Kern zu Hülle (vergl. dazu insbesondere Weiß 1983). Alle gefundenen Modelle besaßen einen entarteten C-O-Kern, eine die Leuchtkraft liefernde Helium-Schalenquelle und eine Helium-Hülle, die für Effektivtemperaturen unter 8000 K fast völlig konvektiv wurde. Die tiefsten erreichten Oberflächentemperaturen lagen bei 5700 K. Ebenfalls von statischen Modellen im Gebiet der Roten Riesen ausgehend entwickelte Schönberger (1977) Modelle im Massenintervall $0.6 \leq M/M_{\odot} \leq 1.0$, die bei nahezu konstanter Leuchtkraft den RCB-Streifen in etwa 10^4 Jahren durchquerten und zu Weißen Zwergen wurden. Die Wege im $\lg T_{\text{eff}} - \lg g$ -Diagramm, welches topologisch $\lg T_{\text{eff}} - \lg L/L_{\odot}$ äquivalent ist, legen eine Masse von $0.7 M_{\odot}$ für R CrB und RY Sgr nahe, wenn man die Werte aus Schönberger (1975) verwendet. Allerdings liegen auch die Wege für $1.0 M_{\odot}$ und $0.6 M_{\odot}$ noch innerhalb der Fehlerbalken, die Schönberger (1975) für $\lg g$ angibt.

Habets (1985) untersuchte den Massenbereich $M/M_{\odot} = 2.0 \dots 4.0$, doch hat bereits das Modell mit $2.0 M_{\odot}$ eine Leuchtkraft von $M_{\text{Bol}} \leq -6.0$, wenn es zum Roten Riesen wird. Daher können Sterne mit solch großen Massen von der Betrachtung ausgeschlossen werden, da sie wegen ihrer zu hohen Leuchtkräfte den RCB-Streifen nie erreichen.

1.2. Details des verwendeten Sternentwicklungsprogramms

1.2.1. Allgemein

In seinen Grundzügen ist das von mir benutzte Sternentwicklungsprogramm das von Kippenhahn et al. (1967). Es löst die bekannten Aufbaugleichungen für sphärisch symmetrische, nicht rotierende Sterne ohne Magnetfeld, die sich zudem im hydrostatischen Gleichgewicht befinden:

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = \frac{-GM_r}{4\pi r^4} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = - \frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (1.4)$$

$$\text{wo } \nabla = \begin{cases} \nabla_r = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r P}{M_r T^4} & \text{für } \nabla_r \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{conv}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.5)$$

Dabei ist ∇_{conv} der Temperaturgradient in Gebieten, die nach dem Schwarzschildkriterium $\nabla_{\text{ad}} \leq \nabla_r$ instabil gegen Konvektion sind. Dazu kommen noch Gleichungen für die nukleare Energieerzeugung pro Gramm und Sekunde $\epsilon = \epsilon(\rho, T, X)$, und damit für die Änderung der Elementhäufigkeiten durch thermonukleare Prozesse - X steht stellvertretend für die chemische Zusammensetzung -, für das Rosseland-Mittel der radiativen Absorption $\kappa = \kappa(\rho, T, X)$ sowie die Zustandsgleichung $\rho = \rho(T, P, X)$.

In der ursprünglichen Version des Programmes wird ein Sternmodell in eine Außenschicht und ein Innenmodell unterteilt, die unterschiedlich behandelt werden. Außen wird $\partial L_r / \partial M_r \equiv 0$ gesetzt, und die restlichen, jetzt zeitunabhängigen Gleichungen, explizit von $r = R$ nach innen integriert, bis $M_r = M_{\text{fit}}$, wobei M_{fit} die vorher festgelegte Fitmasse ist. In diesem Außenbereich wird ∇_{conv} aus den Gleichungen der Mischungswegtheorie (MLT, Böhm-Vitense 1958 und Kippenhahn et al. 1967) berechnet, im Inneren wird angenommen, daß der Grenzfall der MLT, $\nabla_{\text{conv}} = \nabla_{\text{ad}}$, gilt.

Im Innenmodell werden alle Gleichungen mit einem impliziten Verfahren nach der Henyey-Methode (Henyey et al. 1964) gelöst. Damit muß M_{fit} so gewählt werden, daß zwar die wesentlichen Elemente außen ionisiert sind (da sonst ∇_{conv} stark von ∇_{ad} abweicht), gleichzeitig aber die gesamte Energieerzeugung innen stattfindet. Das heißt insbesondere, daß in der Außenschicht auch so gut wie keine thermischen Energien umgesetzt werden. Die Zustandsgleichung berechnet sich außen wie innen aus der Saha-Gleichung für ein ideales Gas aus Wasserstoff und Helium, bzw. bei Entartung (jedoch nur im Innenmodell) aus analytischen Näherungen der Fermi-Integrale nach Kippenhahn und Thomas (1964). Da in dieser Behandlung Druckionisation nicht berücksichtigt wird, ergeben sich aus der Saha-Gleichung zunächst von außen nach innen ansteigende, später jedoch wieder abfallende Ionisationsgrade. Deshalb wird im Programm Vollionisation gesetzt, sobald die Ionisationsgrade wieder fallen würden, bzw. sobald eine von Kippenhahn empirisch gefundene Ungleichung (nur für Wasserstoff-Sterne) für das Einsetzen der Druckionisation in ρ und T erfüllt wird. In den meisten Fällen ist dies unproblematisch. Lediglich bei sehr massearmen Wasserstoff-Hauptreihensternen führt es zu einem Sprung in den Ionisationsgraden, und damit im Molekulargewicht und in der Dichte.

In den folgenden drei Abschnitten werden Verbesserungen am Standardprogramm erläutert werden.

Die thermonukleare Energieerzeugung wurde wie in der üblichen Fassung mit analytischen Formeln gerechnet, worin lediglich die Reaktionsraten durch neuere Werte aus Clayton (1968) ersetzt wurden. Die neueste Rate für die Reaktion $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ von Kettner et al. (1982) wurde üblicherweise nicht berücksichtigt; ebensowenig wurde Kohlenstoffbrennen gerechnet. Der mögliche Einfluß dieser Mängel wird in 1.3. diskutiert werden.

Die Atmosphären wurden nach $T^4(\tau) = \frac{3}{4} (\tau + \frac{2}{3}) T_{\text{eff}}^4$ und $dP/d\tau = GM/\kappa R^2$ berechnet, wobei das Rosseland-Mittel für die Opazität κ verwendet wurde. Sowohl die Annahme einer grauen Atmosphäre als auch die Benutzung des Rosseland- statt des Planck-Mittels sind für Atmosphären kühler Überriesen schlechte Näherungen, doch lag es außerhalb dieser Arbeit, genauere Atmosphärenrechnungen durchzuführen. Auch in der Literatur sind keine Atmosphären-Modelle für kühle, leuchtkräftige Helium-Mischungen vorhanden (Johnson 1984).

1.2.2. Ionisation

Zur Berechnung der Zustandsgleichung nicht-entarteter Materie wird ein System von Saha-Gleichungen gelöst. Da wir chemische Mischungen betrachten, in denen der Anteil des Kohlenstoffs verhältnismäßig hoch ist, ist es notwendig, seinen Einfluß auch in der Zustandsgleichung zu berücksichtigen. Die Saha-Gleichung

$$\frac{x_i^{r+1}}{x_i^r} \cdot \frac{E}{E+1} = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2}{\beta P} \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} e^{-\frac{X_i^r}{kT}} \quad (1.6)$$

wird also für Wasserstoff (auch wenn $X = 0$), Helium und Kohlenstoff gelöst. In (1.6) bedeutet x_i^r den Anteil der Atome der i -ten Sorte ($i \in 1,2,3$) im r -ten Ionisationszustand ($r = 0$ Grundzustand)*, wobei die Summe über alle Zustände einer Atomsorte gleich Eins ist, E die Zahl der freien Elektronen pro Atom, X_i^r das Ionisationspotential des Atoms i im Zustand r und g_r die Zustandssumme dieses Zustandes. Die x_i^r wurden Lang (1980) S. 246 f. entnommen.

Für Wasserstoff erhalten wir neben der Normierung der Ionisationsgrade auf 1 eine Gleichung ($r = 0,1$), für Helium zwei ($r = 0,1,2$) und für Kohlenstoff sechs ($r = 0,1,\dots,6$). Als zehnte Gleichung für die zehnte Unbekannte E haben wir

$$E = \sum_{i=1}^3 \sum_{r=0}^{r_i} \nu_i x_i^r \cdot r \quad (r_i = 1,2,6) \quad (1.7)$$

Dabei ist ν_i der Anteil der i -ten Atomsorte in relativen Teilchenzahlen. Diese Gleichungen werden numerisch mit einem Newton-Iterationsverfahren gelöst. Als Konvergenzkriterium gilt einfach, daß die maximale Korrektur an den Ionisationsgraden x_i^r nach einer Iteration einen festen Wert (10^{-5}) nicht überschreitet.

Für die Zustandssummen wurden zunächst für alle Ionisationszustände die statistischen Gewichte der nichtangeregten Zustände verwendet. Für H, He, C^{IV}

* Anmerkung: Ich verwende folgende Bezeichnungsweise für die Ionisationsstufen: Die X^I -Ionisationsstufe (z.B. C^{IV}) ist der Bereich, in dem X^{I-1} zu X^I ionisiert wird. Die erste Helium-Ionisationsstufe heißt also He⁺-Stufe.

und C^V ist dies auch eine gute Näherung. Der Grundzustand und die ersten drei Ionisationsstufen des Kohlenstoffs jedoch erfordert nach Sackmann et al. (1985) die Berücksichtigung der angeregten Zustände nach

$$u_r^i = g_{r,0}^i + \sum_{j=1}^{j_{\max}} g_{r,j}^i e^{-\frac{\Delta E_{r,j}^i}{kT}} \quad (1.8)$$

Hierin ist i und r wie zuvor, der zweite Index bei g bezeichnet den j -ten Anregungszustand; $\Delta E_{r,j}^i$ sind Anregungsenergien.

Nach Fig. 1 aus zitierter Arbeit sind die u_r^i jedoch nur schwach von der Temperatur abhängig. Für die vier fraglichen Zustände nahm ich daher konstante Mittelwerte an. Ein Einfluß auf die Sternmodelle aufgrund der erhöhten u_r^i war jedoch nicht festzustellen.

Ebenso verhielt es sich bei der Behandlung der Ionisation der restlichen Elemente. Zwei Möglichkeiten wurden getestet:

- a) die restlichen Elemente sind bereits in der Atmosphäre vollionisiert (üblicherweise, auch im Standardprogramm verwendet)
- b) die Vollionisation ist gekoppelt an die von C^V .

1.2.3. Konvektion

Ich habe bereits in 1.2.1. erwähnt, daß im Innenmodell zwar alle vier Aufbaugleichungen (1.1)–(1.4) gelöst werden, jedoch für den konvektiven Gradienten stets der adiabatische gesetzt wird. Das ist eine gute Näherung für konvektive Kerne oder konvektive Außenschichten von relativ kompakten Sternen, wie z.B. der Sonne, die nur in den photosphärischen Schichten überadiabatisch geschichtet ist. Für kühle Riesen ist sie jedoch unbrauchbar, da die Dichte in deren Hüllen so niedrig ist, daß die Konvektion wenig effizient ist, und der Energietransport daher überadiabatisch wird. Zwar kann man durch Herabsetzen der Fitmasse zwischen Außen- und Innenmodell die Konvektionszone nach außen verlegen, wo sie gemäß der MLT behandelt wird, doch verliert man dann die durch Expansion oder Kontraktion der Hülle freigesetzten thermischen Energien. Daher ist es zweckmäßig, auch im Innenmodell konsistent die MLT ohne die Näherung $\nabla_{\text{conv}} = \nabla_{\text{ad}}$ zu verwenden. Der konvektive Gradient $\nabla_{\text{conv}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{conv}}$ berechnet sich (z.B. nach Kippenhahn et al. 1967) aus der kubischen Gleichung

$$\nabla_{\text{conv}} - \nabla_r + \frac{9}{8U} [(\nabla_{\text{conv}} - \nabla_{\text{ad}} + U^2)^{1/2} - U]^3 = 0 \quad (1.9)$$

wo ∇_r der Gradient ist, der sich bei rein radiativem Transport einstellen würde, und

$$U := \frac{12\sigma T^3}{c_P \rho^2 \ell \kappa} \left(\frac{8H_P}{g \ell^2 \delta} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

$$H_P := \frac{RT}{g\mu\beta} \quad g := \frac{GM_r}{r^2} \quad \ell := \alpha H_P$$

(α ist hier der Mischungswegparameter; in allen Rechnungen ist $\alpha = 1.5$ gesetzt).

Gleichung (1.9) ist numerisch stabil für $U \gg 1$, also wenn $\nabla_{\text{conv}} \approx \nabla_r$ (s. dazu Kippenhahn 1962, Fig. 16). Falls jedoch $\nabla_{\text{ad}} \ll \nabla_r \ll \frac{1}{U}$, wird ∇_{conv} als Differenz großer Zahlen gebildet, was zu numerischen Schwierigkeiten führen kann. Im folgenden schließe ich mich daher einer von v. Sengbusch (1967) vorgeschlagenen Methode an, die dieses Problem umgeht: Für den eben angeführten Fall formen wir (1.9) um in

$$\nabla_{\text{conv}} - \nabla_{\text{ad}} + \left[\frac{(\nabla_r - \nabla_{\text{conv}}) \cdot U}{9/8} \right]^{1/3} \left\{ \left[\frac{(\nabla_r - \nabla_{\text{conv}}) U}{9/8} \right]^{1/3} + 2U \right\} = 0 \quad (1.11)$$

Nun ergibt sich ∇_{conv} aus einer kleinen Korrektur an ∇_{ad} . Das ist numerisch unproblematisch. Für das verwendete Henyey-Verfahren benötigt man aber auch die Ableitungen von (1.9) und (1.11). Letztere divergiert im ersten angeführten Fall ($\nabla_{\text{conv}} \approx \nabla_r$) wegen des dann mit der Potenz $-2/3$ auftretenden Termes in eckigen Klammern. Deshalb muß also von Fall zu Fall unterschieden werden, welche der beiden Gleichungen verwendet wird. Grob kann gesagt werden, daß (1.9) benutzt werden sollte, wenn man sich in Fig. 16 aus Kippenhahn (1962) im Gebiet $\nabla_{\text{conv}} \approx \nabla_r$ befindet, und (1.11), falls $\nabla_{\text{conv}} \approx \nabla_{\text{ad}}$.

In der von mir verwendeten Programmversion löse ich nicht die jeweilige kubische Gleichung und verwende das so gefundene ∇_{conv} im Henyey-Verfahren, sondern löse (1.9) bzw. (1.11) direkt als vierte Aufbaugleichung mit. Die Fallunterscheidung wird nach von Sengbusch (1967) wie folgt getroffen:

Zunächst sei ∇'_{conv} irgendein Versuchswert zur Lösung bzw. der Wert von ∇_{conv} aus der letzten Iteration. Außerdem definieren wir $\nabla_{\frac{1}{2}}$ als das arithmetische Mittel aus ∇_r und ∇_{ad} . Setzen wir dieses in (1.9) oder (1.11) innerhalb der Klammern für ∇_{conv} ein, so erhalten wir ein $\nabla_{\text{conv}} =: \nabla_L$. Dann gelte:

1. Falls

$$\nabla_r < \nabla_{\text{ad}} \quad \text{oder}$$

$$\nabla_r \geq \nabla_{\text{ad}} \quad \text{und} \quad \nabla_L \geq \nabla_{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \nabla'_{\text{conv}} \leq \nabla_{\text{ad}}, \quad \text{dann sei} \quad \nabla_{\text{conv}} = \nabla_r$$

2. Falls

$$\nabla_r \geq \nabla_{\text{ad}} \quad \text{und} \quad \nabla_L < \nabla_{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \nabla'_{\text{conv}} \geq \nabla_r, \quad \text{dann sei} \quad \nabla_{\text{conv}} = \nabla_{\text{ad}}$$

3. Falls

$$\nabla_r \geq \nabla_{\text{ad}} \quad \text{und} \quad \nabla_L \geq \nabla_{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \nabla'_{\text{conv}} > \nabla_{\text{ad}}, \quad \text{dann berechne} \quad \nabla_{\text{conv}} \quad \text{aus} \quad (1.9)$$

4. Falls

$$\nabla_r \geq \nabla_{\text{ad}} \quad \text{und} \quad \nabla_L < \nabla_{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \nabla'_{\text{conv}} < \nabla_r, \quad \text{dann berechne} \quad \nabla_{\text{conv}} \quad \text{aus} \quad (1.11)$$

5. Falls

$$\nabla_r \geq \nabla_{\text{ad}} \quad \text{und} \quad (\nabla_r - \nabla_{\text{ad}}) \leq 10^{-2} U^2, \quad \text{dann sei} \quad \nabla_{\text{conv}} = \nabla_r.$$

(nach Kippenhahn 1962, fig. 16)

(1.12)

Damit werden alle numerischen Schwierigkeiten vermieden. $\nabla_{\text{conv}} = \nabla_r$ gilt natürlich immer dann, wenn $\nabla_{\text{ad}} \approx \nabla_r$, aber auch, wenn $\nabla_r \gg \nabla_{\text{ad}}$, falls auch c_p und/oder ρ und damit $1/U$ sehr klein sind (ineffektive Konvektion). Für das Iterationsverfahren benötigt man auch die Ableitungen von (1.9) und (1.11), bzw. die aller auftretenden Größen nach den unabhängigen Variablen. Dabei stellte sich heraus, daß die dabei auftretenden zweiten Ableitungen des Molekulargewichts insbesondere in der He^{++} -Zone unbedingt berücksichtigt werden müssen und nicht vernachlässigt werden können (wie z. B. in Kippenhahn et al. 1967 bei der Ableitung von ∇_{ad}). Die wesentlichen Ableitungen sind daher im Anhang A berechnet. Fall 5 trägt daher wesentlich zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften des Gleichungssystems bei, da die kritischen Ableitungen der thermodynamischen Größen vermieden werden.

Durch die Verwendung der MLT auch im Innenmodell wäre die Unterscheidung außen-innen also überflüssig. Allerdings benötigt das Henyey-Verfahren, soll es bis zur Photosphäre verwendet werden, nach außen hin mehr und mehr Stützstellen pro Masseneinheit, da der Druck immer stärker abfällt, und nur

ein maximales Druckdekrement zwischen zwei Stützstellen sinnvoll ist, sollen die diskretisierten Gleichungen noch realistisch gelöst werden. Deswegen habe ich die Außenschichten beibehalten, die Fitmasse aber typischerweise auf 0.99 M gesetzt. Wegen der extrem niedrigen Dichte in den äußeren Bereichen kann die darin freigesetzte thermische Energie guten Gewissens unberücksichtigt bleiben.

1.2.4. Opazitäten

1.2.4.1 Die "Astrophysical Opacity Library"

Ein Ziel dieser Arbeit war es, den Einfluß der Kohlenstoffanreicherung auf die RCB-Modelle zu berücksichtigen. Deswegen wurden die Ionisationsstufen des Kohlenstoffes bei der Berechnung des Molekulargewichtes, der spezifischen Wärme und damit auch des konvektiven Temperaturgradienten hinzugezogen. Insbesondere ist es aber notwendig, entsprechende Opazitäten-Tabellen zu verwenden. Das heißt, daß man nicht zwischen Werten mit unterschiedlicher Chemie so interpoliert, daß der gewünschte Kohlenstoffanteil - oder noch schlimmer, nur der gewünschte Gesamtanteil aller schwereren Elemente als Helium - erreicht wird. Dies wäre zum Beispiel bei den Tabellen von Cox und Stewart (1965 und 1970) notwendig gewesen, die bisher im Programm verwendet wurden. Die Astrophysical Opacity Library (AOL) von Hübner et al. (1977) bietet aber die Möglichkeit, für jede Mischung aus den 20 häufigsten Elementen bei vorgegebenem Dichte-Temperatur-Gitter die radiativen Rosseland-Opazitäten zu berechnen, da darin zuerst entsprechend der gewünschten Zusammensetzung an festen Frequenzpunkten gespeicherte Absorptionswerte summiert werden und anschließend das Rosseland-Mittel darüber gebildet wird. Aufgrund der in 1.1. zitierten Analysen der Zusammensetzung von RCBs wurden zwei Mischungen gewählt, die diese Ergebnisse einschließen:

Mischung R1: $X = 0.0$ $Y = 0.972$ $X_C = 0.012$ $X_O = 0.010$ $Z = 0.006$

Mischung R2: $X = 0.0$ $Y = 0.903$ $X_C = 0.081$ $X_O = 0.010$ $Z = 0.006$.

R1 entspricht den Ergebnissen von Cottrell und Lambert (1982), R2 denen von Schönberner (1975). Alle gerechneten Modelle hatten Hüllen aus einer der beiden Mischungen.

Für die Kerne der Modelle, d.h. die Gebiete innerhalb der Schalenquelle, wurde eine stets konstante Mischung

$$\text{RC: } X = 0.0 \quad Y = 0.0 \quad X_C = 0.497 \quad X_O = 0.497 \quad Z = 0.006$$

angenommen.

In allen Mischungen umschließt Z den gesamten Massenanteil der restlichen Elemente. Diese stehen in festen solaren Verhältnissen nach Ross und Aller (1976) zueinander. Sauerstoff hat in den Hüllenmischungen ebenfalls ein Verhältnis nach Ross und Aller zu Z. Der entsprechende Kohlenstoffgehalt wäre etwa $X_C = 0.005$, so daß $X_C + X_O + Z = 0.021$ wäre, also einer Population I-Mischung entspräche.

Mit Hilfe der drei verwendeten Tabellen war eine Interpolation zwischen ihnen nur noch in der Schalenquelle notwendig.

1.2.4.2 Elektronenstreuung und -leitung

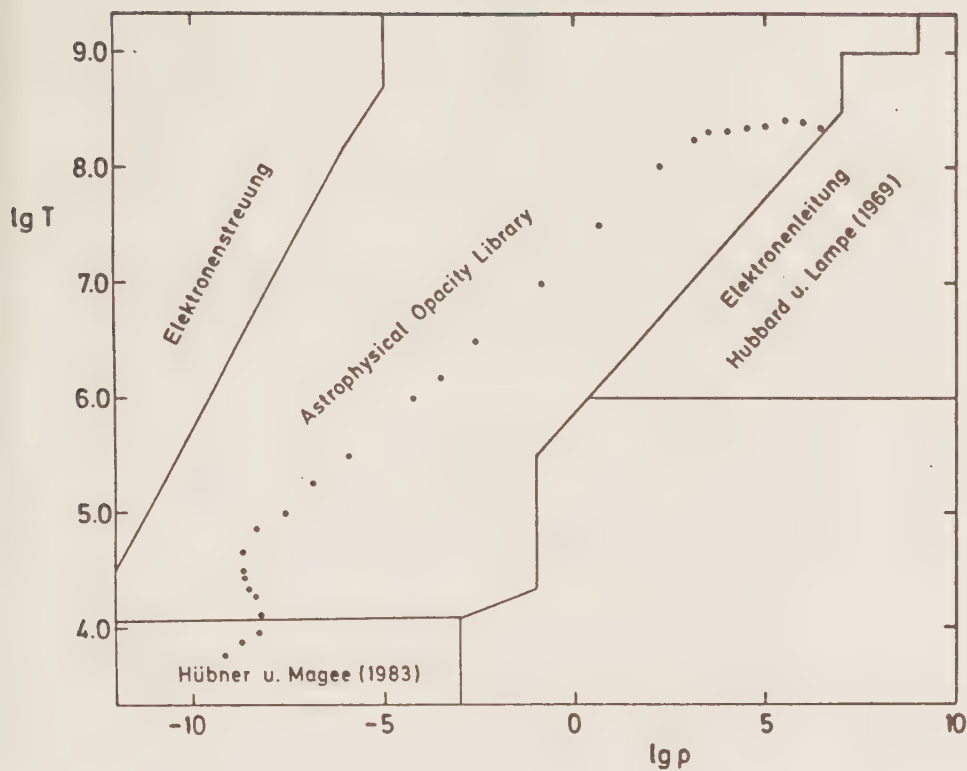
Aus der AOL erhält man bei Mischungen (im Gegensatz zu reinen Elementen) nur die radiativen Opazitäten, nicht jedoch Werte für Elektronenleitung- und Streuung. Deshalb muß jede Tabelle bei niedrigen und hohen Dichten ergänzt werden. Bei niedrigen Dichten (Gebiet der Streuung) und fester Temperatur geschah dies unter der Annahme, daß die Streuopazität nicht von der Dichte abhängt. Diese Näherung ist richtig für Thompson-Streuung, nicht jedoch für Comptonstreuung. Aus einem Vergleich der letzten noch vorhandenen AOL-Werte mit älteren Tabellen, die Streuung mit einschlossen, war zu ersehen, daß die AOL-Tabellen gerade dort aufhören, wo reine Streuung vorherrscht (s. auch Fig. 2). Damit konnte der letzte Tabellenwert einfach nach niedrigen Dichten hin fortgesetzt werden. Bei hohen Dichten wurde κ nach dem harmonischen Mittel aus radiativen und Leitungswert berechnet, also $1/\kappa = 1/\kappa_R + 1/\kappa_c$, wobei κ_c aus Tabellen von Hubbard und Lampe (1969) genommen wurde, die möglichst nahe an den Mischungen lagen. Falls einer der beiden Werte deutlich kleiner ist als der andere, kann κ gleich dem kleineren gesetzt werden. Es ist daher möglich, die Tabelle zu ergänzen, auch wenn κ_R fehlt, da κ_c mit der Dichte stark abfällt (etwa $\sim \rho^{-2}$). Lediglich, falls $\kappa_R \approx \kappa_c$, müssen beide Werte zur Berechnung von κ verwendet werden. Daher war die Ergänzung nur für $T \geq 10^5$ K möglich. Die Verwendung der Hubbard-Lampe-Werte ist sicher nicht genau genug, weil sie

die chemische Zusammensetzung nicht exakt berücksichtigt; die Modelle sind aber nur schwach entartet, so daß der Irrtum, der dadurch entsteht, keinen Einfluß ausüben sollte.

1.2.4.3 Opazitäten bei niedrigen Temperaturen

Die AOL liefert leider nur Werte für $T \geq 1\text{eV} \approx 11605\text{ K}$. Für niedrigere Temperaturen ab 3000 K stellten mir Hübner und Magee (1983) jedoch für R1 und R2 (also exakt dieselben Mischungen!) Rosseland-Opazitäten zur Verfügung, die mit einem ähnlichen Programm wie die aus der AOL berechnet wurden, das aber noch den Einfluß von Molekülen berücksichtigt. Wegen des Fehlens von Wasserstoff in den Mischungen sind dies aber tatsächlich nur N_2 , CO, CN. Für $T \approx 1\text{eV}$ passen die Werte aus beiden Quellen ohne Sprung aneinander, wie das auch zu wünschen ist. In Fig. 2 sind die verschiedenen Gebiete des so erhaltenen Kappa-Gebirges und der Verlauf eines typischen RCB-Modells darin gezeigt.

Die Tabelle für R2 und tiefe Temperaturen wurde später ebenfalls in Sackmann und Boothroyd (1985) verwendet, obwohl dies dort nicht explizit angegeben wird und als "Magee 1984 (private communication)" zitiert wird. Ich schließe das aber aus folgenden Punkten: Erstens beträgt die unterste Temperatur ebenfalls 3000 K und zweitens ist $Y = 0,903$. Da die Autoren jedoch eine Ergänzung für Tabellen mit einem Z von 0.03 (inklusive X_C und X_O) benötigen, wurde X_C (exzessiver Kohlenstoffanteil gegenüber Aller-Wert) als 0.067 angegeben. Tatsächlich wäre aber richtig $Z = 0.021$ und $X_C = 0.076$.



Figur 2:

Schematische Aufteilung des Kappagebirges $\lg \kappa$ ($\lg \rho$, $\lg T$) (vgl. Text) und Verlauf eines typischen RCB-Modells

1.2.4.4 Interpolation innerhalb der Tabellen

Innerhalb der Tabellen wurde mit einem bikubischen Spline interpoliert (s. z.B. Späth 1973). Wegen des engen Gitters treten lediglich bei sehr hohen Temperaturen die bei Splines üblichen Schwingungen auf. Eine qualitative Untersuchung ergab, daß der maximale Fehler $\Delta \log \kappa$ im Gebiet der Elektronenstreuung, wo κ konstant sein sollte, kleiner als 0.1 ist. Dieser Tabellenbereich wird von den Modellen aber nicht berührt.

Da das Kappa-Gebirge nicht für alle ρ und T -Werte besetzt ist (vgl. Fig. 2), sind für die Splinefunktion $f(\lg \rho, \lg T)$ folgende natürliche Randbedingungen verwendet worden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lg \rho^2} = 0 \quad \text{für } \rho = \rho_{\min}, \rho_{\max}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lg T^2} = 0 \quad \text{für } T = T_{\max}, T_0(\rho)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \lg \rho^2 \partial \lg T^2} = 0 \quad \text{für } (\rho, T) = (\rho_{\min}, T_{\min}), (\rho_{\min}, T_{\max}), (\rho_{\max}, T_{\max}),$$

$$(\rho_{\max}, T_0(\rho_{\max})) \quad (1.13)$$

wobei $\lg \rho_{\min} = -12$, $\lg \rho_{\max} = 10$.

$$\lg T_{\max} = 9.2 \quad T_{\min} \begin{cases} 3000 \text{ K} & \text{für R1, R2} \\ 1 \text{ eV} & \text{für RC} \end{cases}$$

$T_0(\rho)$ minimaler Temperaturwert bei fester Dichte ρ , bei dem noch Tabellenwert vorhanden ist.

Die Annahme verschwindender Krümmung ist bis auf den Rand bei tiefen Temperaturen sehr gut bzw. exakt.

Eine verbesserte Interpolation würde z.B. die Verwendung gedämpfter exponentieller oder birationeller Splines (nach Späth 1973) liefern. Beide Methoden sind getestet worden. Im interessierenden Bereich der Tabellen liefern sie aber innerhalb der angegebenen Genauigkeit der Werte an den Stützpunkten dieselben Ergebnisse wie der verwendete natürliche Spline.

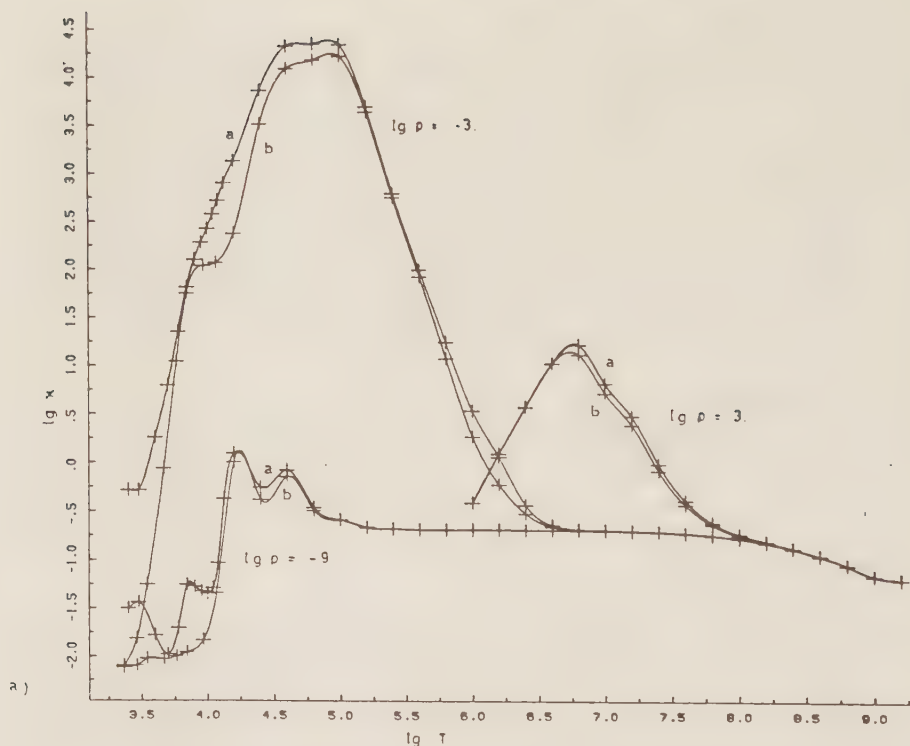
1.2.4.5 Vergleich der Opazitäten mit anderen Tabellen

In den folgenden Figuren 3 a,b,c werden verschiedene Opazitätstabellen und Mischungen verglichen. In Fig. 3a) werden zwei Tabellen aus Hübner et al. (1977) mit der Ergänzung Hübner und Magee (1983) bzw. aus Hübner (1979) in Meyer-Hofmeister (1982) bei drei Dichten verglichen. Die Tabellen unterscheiden sich lediglich im Helium bzw. Kohlenstoffanteil. Während Sackmann und Boothroyd (1985) fanden, daß bei wasserstoffreichen Mischungen ein Ersetzen von Wasserstoff durch Kohlenstoff die Opazitäten im großen und ganzen reduziert, werden sie im Falle von Helium erhöht. Dieser Effekt ist vor allem bei niedriger Dichte und Temperatur deutlich. Vermutlich rührt er zum Teil von der Bildung von Molekülen her.

Auch gegenüber den alten Tabellen von Cox und Stewart (1970) sind die Werte erhöht (siehe Fig. 3 b). Das ist auch zu erwarten: je mehr Absorptionsmechanismen oder -querschnitte berücksichtigt werden, umso höher wird i. a. das Rosseland-Mittel. Der Effekt der Moleküle ist besonders deutlich zu sehen. Lediglich für $\lg p = -9$, und $4.0 \leq \lg T \leq 4.7$ sind die alten Werte höher. Der Grund ist unbekannt.

Vergleicht man die Hübner-Werte mit denen von Alexander et al. (1983) - beides Tabellen der III. Generation, d.h. unter Einschluß von Molekülen -, so sieht man aus Fig. 3 c), daß trotz des etwas niedrigeren H-Gehalts der Hübner-Tabelle deren Werte für $\lg T \geq 3.55$ höher sind. Das dürfte daran liegen, daß bei diesen Temperaturen die Moleküle noch nicht die Opazität dominieren, sondern nur erhöhen. Die atomare Absorption wird aber von Hübner (speziell bei Eisen und Kohlenstoff (Hübner 1984)) umfassender berücksichtigt. Bei tieferen Temperaturen tragen dann hauptsächlich die Moleküle bei, so daß dort die Alexander-Werte höher sind. In dieser Tabelle werden nämlich mehr Moleküle berücksichtigt. Es bleibt aber zu bemerken (Hübner 1984), daß in diesem Temperatur-Dichte-Bereich die Werte aller Autoren mit großen Unsicherheiten behaftet sind.

Eine genauere Untersuchung über die verschiedenen Beiträge zur Opazität ist von Hübner und Sharp begonnen worden. Auch bei den reinen Molekülopaazitäten von Sharp (1981) ergaben sich ähnliche Verhältnisse zu den Hübner-Werten, wie bei Alexander et al. (1983).



Figur 3:

Vergleich verschiedener Opazitätstabellen:

a) Bei drei festen Dichten gewonnene Kurven für eine Mischung

$X = 0.0$, $Y = 0.979$, $XC = 0.005$, $XO = 0.010$, $Z = 0.006$ (Kurven b)
und

$X = 0.0$, $Y = 0.903$, $XC = 0.081$, $XO = 0.010$, $Z = 0.006$ (Kurven a)

b) Bei den gleichen Dichten zwischen Hübner 1977 und 1983 (durchgezogen)
und Cox, Stewart 1970 (gestrichelt) für die erste Mischung aus a)

c) Bei drei festen Dichten zwischen Alexander et al. 1983 (durchgezogen)
(Mischung $X = 0.71$, $Y = 0.27$, Rest- $Z = 0.02$) und Hübner 1977 und
1979 (gestrichelt) (Mischung $X = 0.70$, $Y = 0.28$, Rest- $Z = 0.02$).

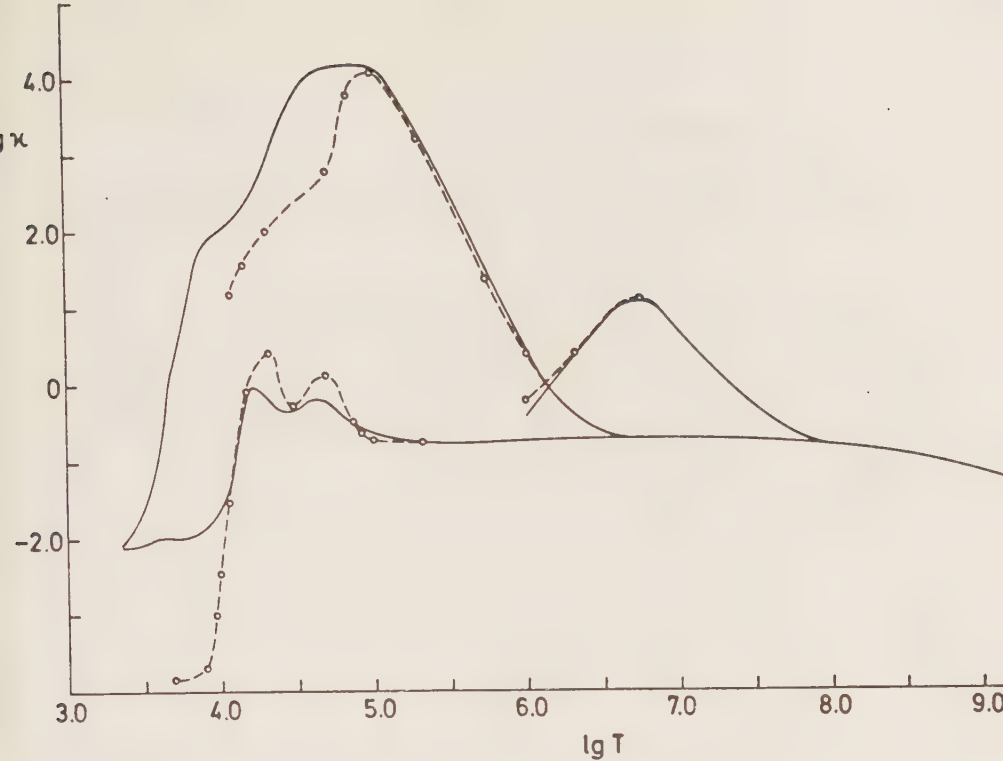


Fig. 3b)

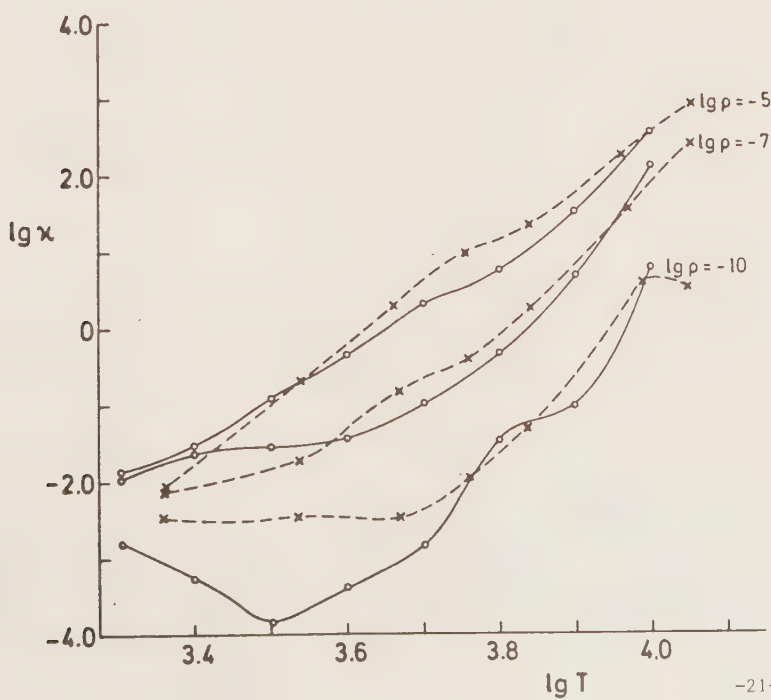


Fig. 3c)

1.2.4.6 Zustandsgleichung

Im Prinzip kann man aus der AOL auch Druck und innere Energie, und damit alle thermodynamischen Größen erhalten. Die Zustandsgleichung der AOL ist sicher wesentlich besser als die einfache, von mir benutzte, da sie z.B. alle Ionisationsstufen, Plasmaeffekte u.ä. einschließt. Da die Tabellen jedoch $P(\rho, T)$ liefern, das Sternentwicklungsprogramm jedoch $\rho(P, T)$ benötigt, würde die Berechnung thermodynamischer Größen die zweimalige Interpolation in der Druck- (daraus wird ρ abgelesen) und Innere Energie-Tabelle erfordern. Damit würden Interpolationsfehler die physikalische Qualität der Tabellen wieder "ausgleichen". Deshalb wurde darauf verzichtet.

1.3. Standardentwicklung

Da bisher noch nicht bekannt ist, welche Sterne die Vorläufer von RCBs sind, müssen wir bei der Frage nach dem Entwicklungszustand und den Massen zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen:

Die erste ist, daß sich RCBs aus homogenen Sternen entwickeln, deren chemische Zusammensetzung dieselbe ist, wie sie bei den RCBs beobachtet wird. Solche homogenen Sterne würden also die "RCB-Hauptreihe" bilden, die natürlich rein theoretisch ist. Denkbar wäre aber auch, daß diese Sterne zu Beginn ihres Lebens als RCBs bereits einen Kohlenstoff-Sauerstoff-Kern besitzen, dessen Masse aber nur etwa die Hälfte der Gesamtmasse ausmacht. Darüber läge dann die Hülle der bekannten kohlenstoffreichen Heliummischung. Solche Sterne sind, wie wir sehen werden, noch nahe bei der "RCB-Hauptreihe", und könnten z.B. aus dem Doppelstern-Szenario von Iben und Tutukov (1985) entstanden sein (ein Helium-Weißer Zwerg verschmilzt mit einem C-O-Weißen Zwerg, wobei letzterer dann den Kern des neuen RCB bildet und an der Grenzfläche eine Helium-Schalenquelle zu brennen beginnt).

Die zweite Möglichkeit ist, daß der RCB-Vorläufer bereits ein Roter Riese auf dem Asymptotischen Riesenast (AGB) war, und -irgendwie- seine Wasserstoffhülle verloren hat. Dann säße die Helium-Schalenquelle bei mehr als 80% der Masse, da der Vorläufer mit Wasserstoff- und Helium-Schalenquelle bereits soweit entwickelt war, daß beide weniger als 20% der Masse trennt. Der genaue Ort der Helium-Schalenquelle hängt dann von der Phase ab, in der der Vorgänger seine Wasserstoffhülle verliert (das kann auch vermischt bedeuten!).

Daß es für beide Möglichkeiten Sternmodelle im Gebiet der beobachteten RCBs gibt, zeigen die Arbeiten von Paczynski (1971) und Law (1982) einerseits und Trimble und Paczynski (1972) und Biermann und Klippenhahn (1971) andererseits. In diesem Abschnitt soll die erste Alternative untersucht werden.

1.3.1. Übersicht über die Entwicklungswege

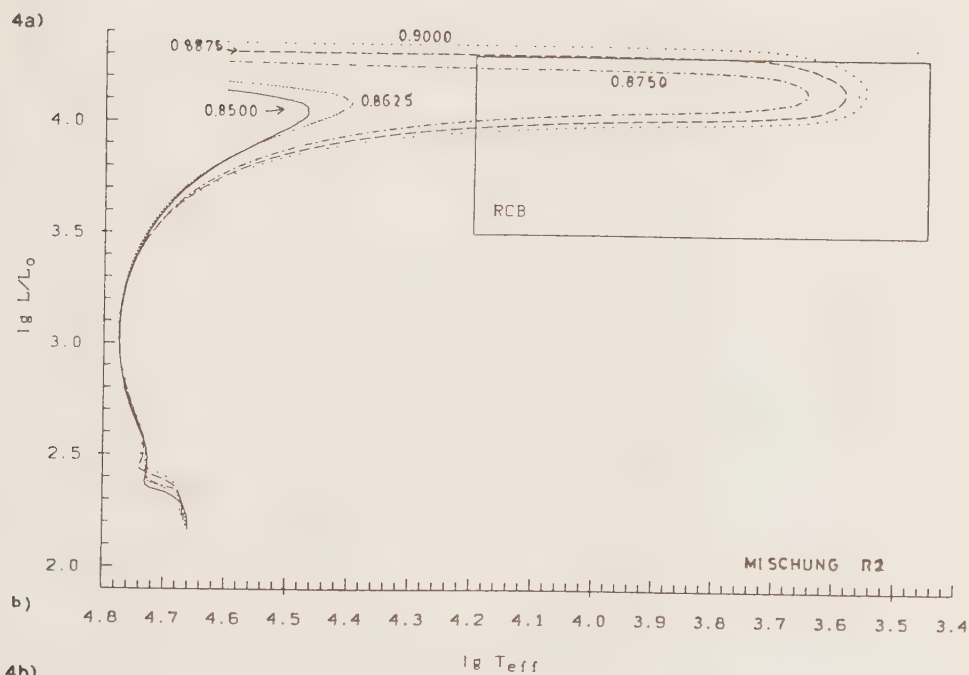
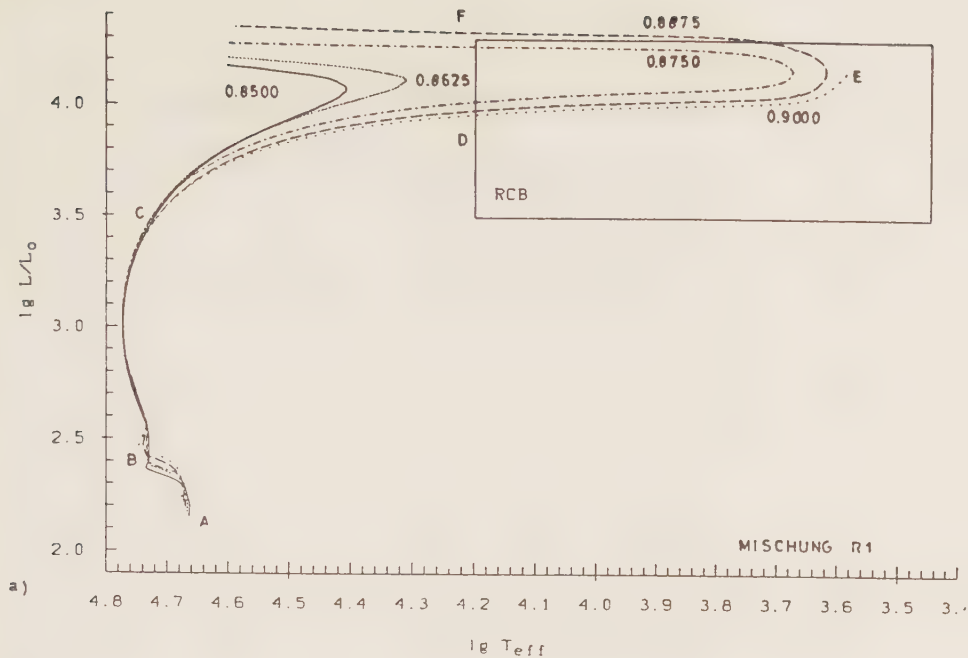
Als Standardentwicklung bezeichne ich also folgendes: Das Ausgangsmodell ist ein homogener Stern der Zusammensetzung R1 und R2, wie sie in 1.2.4 definiert wurde. Er befindet sich damit auf der "RCB-Hauptreihe". Im Zentrum brennt Helium, welches allein die Leuchtkraft liefert. Durch die damit

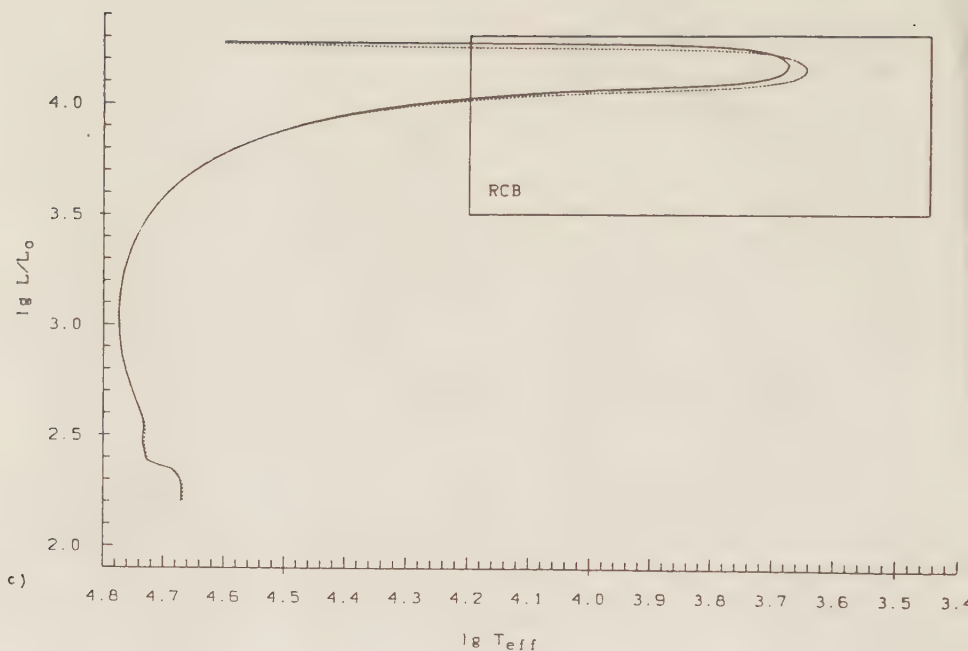
verbundene Änderung der chemischen Zusammensetzung des Kernes entwickelt sich das Modell in der üblichen Weise. Allerdings sind die Resultate der thermonuklearen Prozesse von mir festgelegt: was an Helium verbrannt wird, wird auf die Massenanteile von Kohlen- und Sauerstoff so verteilt, daß sie gleich sind. Eine Aufteilung in gleiche Anteile X_C und X_O scheint realistisch (vgl. Law 1981 und Habets 1985). Da aber der C-O-Kern nur über sein Molekulargewicht, die Opazitäten und die Neutrinoabkühlung (- die ohne Netzwerk ebenfalls unsicher ist -) auf die Struktur des Sterns wirkt, und sich die ersten beiden Effekte bei Temperaturen von etwa $10^{8.2}$ K nicht mehr sehr empfindlich gegen verschiedene C und O-Anteile zeigen, glaube ich, daß diese Festlegung der aus dem Heliumbrennen resultierenden Zusammensetzung ohne deutlichen Einfluß auf die Gesamtentwicklung bleibt. Das wäre anders, wenn auch noch Phasen des Kohlenstoffbrennens, das natürlich sehr empfindlich von X_C und X_O abhängt, gerechnet würden. Das ist aber nicht der Fall. Zwar zeigen die Modelle teilweise Ansätze zum Kohlenstoffbrennen ($\epsilon \leq 10^{-10}$ erg/gs), doch kann dies vernachlässigt werden. Wir werden aber noch sehen, daß die mit diesem Vorgehen ebenfalls verbundene Änderung der Schalenquellenstruktur möglicherweise größere Folgen hat. Alle Modelle bestehen daher aus Hüllen der Zusammensetzung R1 und R2, der Schalenquelle als Übergangszone und dem nichtbrennenden Kern der Mischung RC, der natürlich zu Beginn der Entwicklung verschwindende Masse hat. Die Sterne werden bei konstanter Gesamtmasse soweit entwickelt, bis sie den RCB-Streifen, wie in 1.1. festgelegt, durchlaufen haben, bzw. bis klar ist, daß sie ihn nicht mehr erreichen werden.

Für beide Hüllen- oder Ausgangszusammensetzungen wurden Entwicklungssequenzen mit den Massen

$$M/M_{\odot} = 0.8500, 0.8625, 0.8750, 0.8875, 0.9000$$

gerechnet. Die Ergebnisse sind in den Figuren 4a und 4b dargestellt. In 4c ist der geringe Einfluß der chemischen Zusammensetzung auf den Entwicklungsweg (bei gleicher Masse $M/M_{\odot} = .8750$) zu sehen: Das Modell mit dem höheren Kohlenstoffgehalt (gestrichelte Linie) wird wegen der höheren Opazitäten in den äußeren Schichten kühler; die Leuchtkraft liegt aber niedriger. Das resultiert aus der Abhängigkeit des Tripel- α -Prozesses, über den der Hauptteil der Leuchtkraft erzeugt wird, von der dritten Potenz der Heliumhäufigkeit. Der Effekt der höheren Dichte aufgrund des höheren Molekulargewichts verschwindet dagegen. In Tabelle 1 sind außerdem die





4c)

Figur 4:

Entwicklungswege der Standardentwicklung; die Zahlen bezeichnen die Gesamtmasse (in $M_{\odot}$)

- a) für Mischung R1: bestimmte Entwicklungsstadien (A-F, s. Tab. 1) sind gekennzeichnet.
- b) für Mischung R2,
- c) Vergleich von $M/M_{\odot} = 0.8750$ mit Mischung R1 (durchgezogen) und R2 (gestrichelt).

Tabelle 1

Leuchtkraft, Effektivtemperatur und Alter (in 10^7 Jahren) der Modelle der Standardentwicklung in einigen wichtigen Phasen (A-F, in Fig. 4a angegeben).

		R1					R2				
		0.8500	0.8625	0.8750	0.8875	0.900	0.8500	0.8625	0.8750	0.8875	0.900
homogenes Modell A	$\lg L/L_{\odot}$	2.151	2.173	2.196	2.218	2.240	2.159	2.182	2.205	2.227	2.249
	$\lg T_{\text{eff}}$	4.664	4.667	4.670	4.673	4.677	4.657	4.660	4.664	4.667	4.669
Ende Kernbrennen B	$\lg L/L_{\odot}$	2.365	2.474	2.495	2.519	2.462	2.364	2.457	2.493	2.435	2.453
	$\lg T_{\text{eff}}$ t	4.735 1.296	4.733 1.248	4.734 1.184	4.737 1.184	4.748 1.120	4.730 1.151	4.729 1.111	4.731 1.056	4.740 1.040	4.736 1.056
$\lg L/L_{\odot} = 3.5$ C	$\lg T_{\text{eff}}$ t	4.719 1.915	4.723 1.796	4.724 1.729	4.714 1.708	4.712 1.625	4.728 1.752	4.732 1.652	4.722 1.592	4.723 1.565	4.723 1.536
$\lg T_{\text{eff}} \leq 4.2$ D	$\lg L/L_{\odot}$ t	- -	- -	4.020 1.764	3.980 1.742	3.692 1.658	- -	- -	4.010 1.625	3.980 1.598	3.959 1.569
kühlestes Modell E	$\lg L/L_{\odot}$	4.074	4.097	4.168	4.167	4.166	4.037	4.077	4.148	4.156	4.168
	$\lg T_{\text{eff}}$ t	4.408 1.925	4.319 1.833	3.678 1.769	3.623 1.748	3.590 1.666	4.470 1.786	4.401 1.686	3.649 1.630	3.587 1.604	3.552 1.576
$\lg T_{\text{eff}} \geq 4.2$ F	$\lg L/L_{\odot}$ t	- -	- -	4.270 1.773	4.321 1.752	(nicht berechnet)	- -	- -	4.248 1.633	4.315 1.609	4.350 1.580

Entwicklungsalter sowie Werte für Leuchtkraft und Effektivtemperatur für verschiedene Stadien gegeben.

Bei gleicher chemischer Hüllenzusammensetzung sinkt die kleinste Effektivtemperatur, die überhaupt erreicht wird, mit steigender Masse. Damit liefert der linke Rand des RCB-Gebietes eine untere Grenze für die Masse der RCBs, falls sie sich auf diesem Wege entwickeln sollten. Der Übergang zwischen Sternen, die am kühlisten Punkt das RCB-Gebiet nicht mehr erreichen, und solche, die dieses Gebiet über die obere Leuchtkraftgrenze wieder verlassen, vollzieht sich in einem äußerst engen Massenbereich von $\Delta M/M_{\odot} = 0.025$. Lediglich $M/M_{\odot} = 0.8750$ und 0.8875 liegen so, daß ihre Leuchtkraft immer in den RCB-Grenzen liegt, wenn ihre Effektivtemperatur unter $10^{4.2}$ fällt. Die Entwicklung zurück zu heißen Temperaturen (und schließlich zu Weißen Zwergen) hängt von der restlichen Hüllennasse ab. Wird ein kritischer Wert unterschritten, kann die Temperatur von der Schalenquelle, die als Thermostat wirkt, bis zur Photosphäre nicht mehr genügend abfallen, der Rand des Sterns wird heißer, die Leuchtkraft, die von der Kernmasse bestimmt wird, bleibt konstant, also wird der Gesamtradius kleiner. Dies resultiert in den nahezu horizontalen oberen Ästen der Entwicklungswege.

Da bei etwa gleicher kritischer Hüllennasse aber die Kernmasse mit der Gesamtmasse steigt, liegt dieser Ast für größere Masse bei höherer Leuchtkraft. Modelle mit $M/M_{\odot} \geq 0.90$ schneiden also nur mit ihrem unteren Ast das RCB-Gebiet, danach umlaufen sie es. Modelle mit $M \geq 2.0 M_{\odot}$ schneiden auch das RCB-Gebiet nicht mehr, weil bereits ihr unterer Ast bei $\lg L/L_{\odot} \geq 4.3$ liegt (Habets 1985).

Da sich der innere Aufbau dieser Modelle nur sehr wenig von dem des von Law (1982) gerechneten Heliumsternes ($M/M_{\odot} = 1.0$) unterscheidet, sei auf diesen Artikel verwiesen. Außerdem wird in 1.4 näher auf die innere Struktur von RCB-Modellen eingegangen.

1.3.2. Einfluß der Schalenquellenstruktur

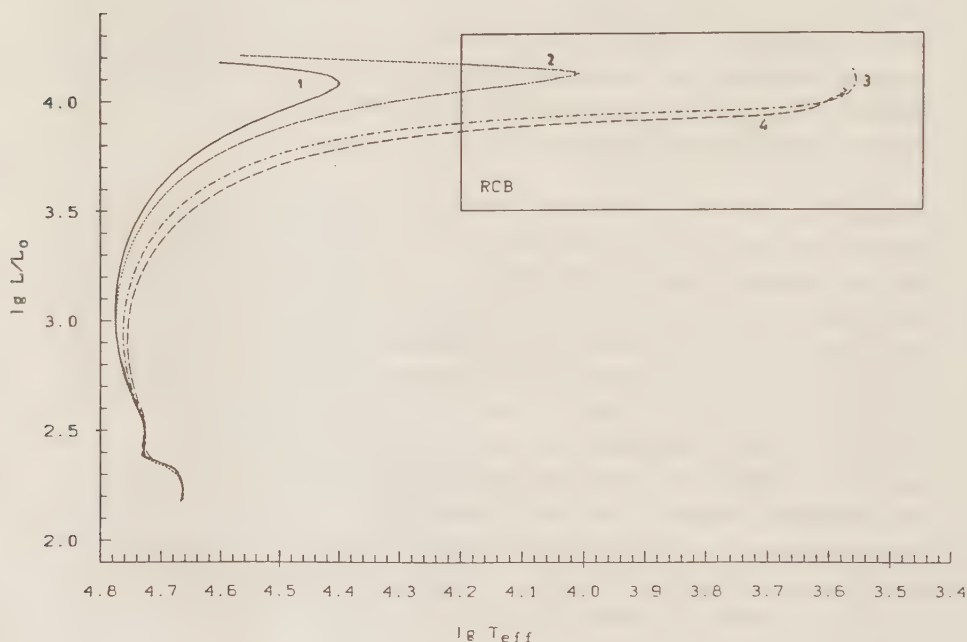
Betrachten wir einen Punkt im Inneren eines entwickelten RCB-Modellens, an dem gerade das Heliumbrennen beginnt, der also am oberen Rand der Schalenquelle sitzt. Wegen des zu Beginn im Vergleich zu Helium niedrigen Kohlenstoffanteils dominiert zunächst der 3α -Prozeß das thermonukleare Brennen und die chemischen Änderungen. Im Laufe der weiteren Entwicklung

steigt sowohl die Temperatur als auch der Kohlenstoffanteil, während der Heliumgehalt sinkt. Dadurch wird der 3α -Prozeß immer weniger wichtig, während der $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ Prozeß mehr und mehr die Energieerzeugung übernimmt. Wenn der Heliumanteil unter 10% gefallen ist, wird praktisch die gesamte nukleare Energie über diese Reaktionskette gewonnen. Für die gesamte Schalenquelle bedeutet das, daß vom oberen Rand bis etwa der Stelle, wo Y auf 0.10 gefallen ist, der 3α -Prozeß die Entwicklung bestimmt, und von dort bis zum unteren Rand ($Y = 0.0$) der $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Prozeß. Der dritte noch mögliche Prozeß $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$ ist immer vernachlässigbar, da stets entweder der Sauerstoff- oder der Heliumgehalt sehr niedrig ist. Insgesamt werden etwa 80% der gesamten Leuchtkraft aus dem 3α -Prozeß gewonnen, der Rest aus dem $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Prozeß.

Dieser wird nun im verwendeten Sternentwicklungsprogramm mit der alten Reaktionsrate gerechnet (s. dazu und zu den verwendeten Interpolationsformeln für die Energieerzeugung Thomas 1967), die, wie man jetzt weiß (Kettner et al. 1982) um einen Faktor 3-5 zu niedrig ist. Bei erhöhter Reaktionsrate wird sich also der untere Bereich der Schalenquelle im Vergleich zum oberen schneller als in den alten Rechnungen entwickeln. Außerdem wird natürlich der $^{12}\text{C}-\alpha$ -Prozeß wichtiger, wodurch auch der Sauerstoffgehalt steigt. Anders ausgedrückt, bei vorgegebener Kernmasse und damit Leuchtkraft - weil in solchen Modellen die Kernmasse die Leuchtkraft bestimmt - brennt die Schalenquelle effektiver und wird deshalb dünner als bei niedrigerer Reaktionsrate sein. Dadurch (das ist zum Beispiel aus der fast polytropen Struktur der Hülle erkennbar) kann aber auch die Temperatur von der als Thermostat wirkenden Schalenquelle bis zur Photosphäre stärker abfallen, wodurch das Modell kühler wird.

Ich habe daher, um den Einfluß einer erhöhten $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Rate zu untersuchen, Modelle der Masse $M/M_{\odot} = 0.8625$ (beide Hüllenmischungen) mit unterschiedlichen Raten für diesen Prozeß entwickelt (Fig. 5). Dabei wurde die verwendete Formel für die Energieerzeugung aus $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ einfach mit einem "Kettner-Faktor" $f \geq 1$ multipliziert. Da die Modelle mit $M/M_{\odot} = 0.8625$ den RCB-Streifen gerade noch nicht erreichen, ist der Effekt hier besonders gut zu sehen: mit erhöhter Reaktionsrate werden auch sie bis 4000 K kühl. Dabei ist der Unterschied zwischen einem Kettner-Faktor 3 und 5 bei weitem nicht so groß wie zwischen 1 und 3. Die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Korrektur an den Reaktionsprodukten des Heliumbrennens

wurde bei den Testrechnungen 2 (Kettner-Faktor 1), 3 und 4 aus Fig. 5 nicht vorgenommen. Diese Korrektur wirkt in den äußeren Bereichen der Schalenquelle hemmend auf die ^{12}C - α -Reaktion, da zuviel Sauerstoff "erzeugt wird". Dort ist dieser Prozeß aber unwichtig. Innen wirkt sie eher begünstigend, da der Kohlenstoffgehalt weniger stark abnimmt (das im selben Prozeß verbrauchte Helium wird ja nur zur Hälfte zu Sauerstoff "verbrannt").



Figur 5:

Einfluß unterschiedlicher chemischer Entwicklung in der Schalenquelle

($M/M_{\odot} = 0.8625$)

Kurve 1: Kettner-Faktor 1 ; Korrektur an X_C und X_O (R2)

Kurve 2: Kettner-Faktor 1 ; keine Korrektur (R2)

Kurve 3: Kettner-Faktor 3 ; keine Korrektur (R2)

Kurve 4: Kettner-Faktor 5 ; keine Korrektur (R1)

Bei richtiger Behandlung des $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ Prozesses, d. h. ohne Korrektur und mit höherer Reaktionsrate werden also auch Sterne mit Massen unter $0.8750 M_{\odot}$ das RCB-Gebiet erreichen. Da die Grenzmasse aber, wie aus Fig. 5 ersichtlich, stark von den genauen Prozessen in der Schalenquelle abhängt, kann sie nur dann besser bestimmt werden, wenn ein aktuelles Netzwerk statt der Interpolationsformeln für die nukleare Energieerzeugung verwendet werden würde. Das war mir aber aus Zeitgründen nicht möglich.

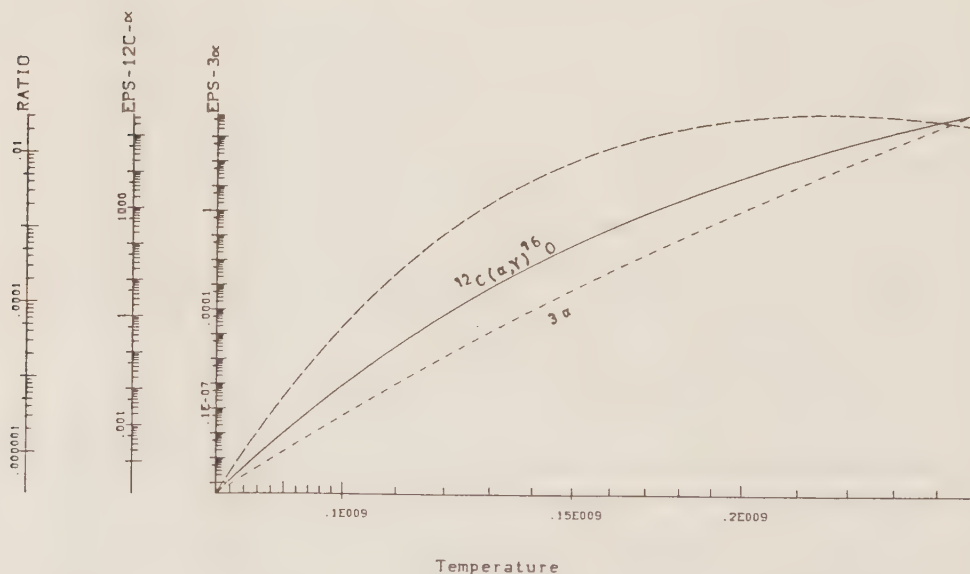
Es muß noch einmal in Erinnerung gerufen werden, daß sich das Gesagte auf die Entwicklung von homogenen Modellen in den RCB-Streifen bezieht. Modelle, die bereits am kühlen Ende des RCB-Gebietes angekommen sind, reagieren weit weniger stark auf Änderungen innerhalb der Schalenquelle.

Da die Entwicklung der Modelle nach dem Ende des zentralen Heliumbrennens bis zu den kühlisten Effektivtemperaturen so stark von Struktur und Entwicklung der Schalenquelle abhängt, müssen auch die Zeitschritte zwischen Modellen sehr klein gehalten werden. Die Zeitschrittsteuerung geschieht im Sternentwicklungsprogramm normalerweise dadurch, daß die größte Korrektur an einer Variable während aller Iterationen an allen Stützstellen in einem bestimmten Toleranzbereich liegen muß (üblich ist $0.15 - 0.75$ für den natürlichen Logarithmus der Variablen). Unterschreitet sie den unteren Wert, kann der Zeitschritt verdoppelt werden, überschreitet sie den oberen Wert, muß er halbiert werden. Um nun Entwicklungswege für RCBs zu erhalten, die gegen eine weitere Verkleinerung des Zeitschrittes (so gut wie) invariant sind, mußte dieser Bereich auf 0.02 (!) - 0.10 gesenkt werden. Außerdem wurde eine weitere Steuerung eingebaut. Dabei darf sich der Heliumgehalt an der Stelle maximaler Energieerzeugung (typischerweise bei $Y \approx 0.5$ in der Schalenquelle) nur um einen bestimmten Prozentsatz ändern, der auf 10% gesetzt wurde. Das heißt, daß die ganze Schalenquelle sich um maximal diesen Wert (meistens aber unter 5%) in Masse verschieben darf. Bei Wasserstoffschalenquellen sind Werte um 30% oder darüber üblich.

Für das sehr empfindliche Modell mit $M/M_{\odot} = 0.8625$ mußte dieser Faktor sogar nochmals halbiert werden.

Der Fehler, der bei zu großem Zeitschritt gemacht wird, ist folgender: Die Änderung der chemischen Elemente wird berechnet (vgl. Thomas 1967), indem angenommen wird, daß der Temperatur-abhängige Teil der Energieer-

zeugung (Formeln 11-13 bei Thomas 1967) konstant ist. Da aber die Temperatur an fester Massenkoordinate während der Entwicklung der Schalenquelle steigt, wird die Energieerzeugung unterschätzt. Tragen immer die gleichen Prozesse in gleichem Maße zur Energieerzeugung des Sterns bei, so bewirkt dies nur eine künstliche Verlängerung des Brennens (s. Hauptreihenstadium!). In der Schalenquelle aber dominiert am oberen Rand der Tripel-Alpha-Prozeß, am unteren Rand die Reaktion $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ mit unterschiedlichen Zeitskalen. Aus Fig. 6, wo die Temperaturabhängigkeit beider Prozesse gezeigt ist, erkennt man, daß bei den in der Schale herrschenden Temperaturen ein Unterschätzen der Brenntemperatur auf den ersten Prozeß stärker wirkt als auf den zweiten. Das heißt, daß die Bewegung des oberen Randes durch den Stern stärker verlangsamt wird als die des unteren: Folge: die Schalenquelle ist dünner! Erst bei höheren Temperaturen ($\lg T \approx 8.35$), die erreicht werden, wenn die Quelle weit außen sitzt, ist der Fehler derselbe, und die Schalenquelle wird wieder konsistent (wenngleich zu langsam) verschoben.



Figur 6:

Temperaturabhängigkeit des Tripel-Alpha-Prozesses (kurz gestrichelt), der $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Reaktion (durchgezogen) und des Verhältnisses (lang gestrichelt) im Temperaturbereich der Schalenquellen.

Das Ergebnis zu großer Zeitschritte ist also ähnlich dem einer erhöhten $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Rate: die Schalenquelle wird enger, der Stern kühler. Ursprünglich wurde die Abhängigkeit der tiefsten erreichten Effektivtemperaturen von der Schalenquellen-Entwicklung auch durch die Verwendung zu großer Zeitschritte entdeckt.

1.4. Rote Riesen-Entwicklung

1.4.1. Entwicklungswege

Über die Herkunft der RCBs ist so gut wie nichts bekannt. Folgende Möglichkeiten werden diskutiert: Ein Mischen der ursprünglich wasserstoffreichen Hülle bis in die Zone des Wasserstoffbrennens, so daß der Wasserstoffgehalt abnimmt, und der von He und C zu (Paczynski 1971), ein Abstoßen oder -blasen der Wasserstoffhülle (Wood und Faulkner 1973), ein Mischen während eines "letzten Helium-Flashes" (Iben und Renzini 1983), und schließlich das Verschmelzen eines C-O-Weißen Zwerges und eines He-Weißen Zwerges (Iben und Tutukov 1985), das bei völliger Durchmischung sogar bei einem RCB-Hauptreihenmodell enden könnte. Dieser Möglichkeit entspräche die Standardentwicklung aus Abschnitt 1.3. In allen anderen Fällen würde ein Stern als RCB im Gebiet der Roten Riesen erscheinen und sich von dort aus weiterentwickeln. (Die in 1.5.1 gerechneten statischen Modelle sind eine Näherung an solche "neu entstandene" RCBs.)

Die in diesem Abschnitt behandelten Entwicklungswege wurden durch zu große Zeitschritte während und nach dem Hauptreihenstadium homogener Modelle erhalten. Die unteren Äste der Wege in der Abbildung 7 sind daher nur als grobe Näherung zu betrachten. Dort sind die Zeitschritte typischerweise mehr als 20% der nuklearen Zeitskala, mit der dieser Teil der Entwicklung um sich geht. Sind die Modelle aber erst einmal im Gebiet der Roten Riesen angekommen, sinkt der Zeitschritt auf wenige Prozent der nuklearen Zeitskala und das Temperaturprofil in der Schalenquelle kann sich mit dem der Elemente so adjustieren, daß die Schalenquelle sich als ganzes während des Brennens reproduziert, bzw. verschleißt ("Einbrennen" der Schalenquelle). Die Modelle ab dem kühlestem Modell einer Sequenz können damit als realistisches Startmodell für die Weiterentwicklung eines RCB-Sterns, der im Gebiet der Roten Riesen seine Entwicklung begann, angesehen werden. Wie er allerdings dorthin kam, bleibt unbekannt. Erscheint ein Stern zu einem späteren Zeitpunkt im RCB-Gebiet (d.h. Schalenquelle weiter außen), muß er nicht notwendigerweise den gleichen Weg zurücklegen (vgl. 1.5.1!) Die Entwicklungen dieses Abschnitts sind also als eine Möglichkeit der Weiterentwicklung von Roten Riesen als Anfangsstadien von RCBs zu sehen.

Folgende Massen wurden gerechnet:

Für beide Hüllenmischungen R1 und R2 jeweils:

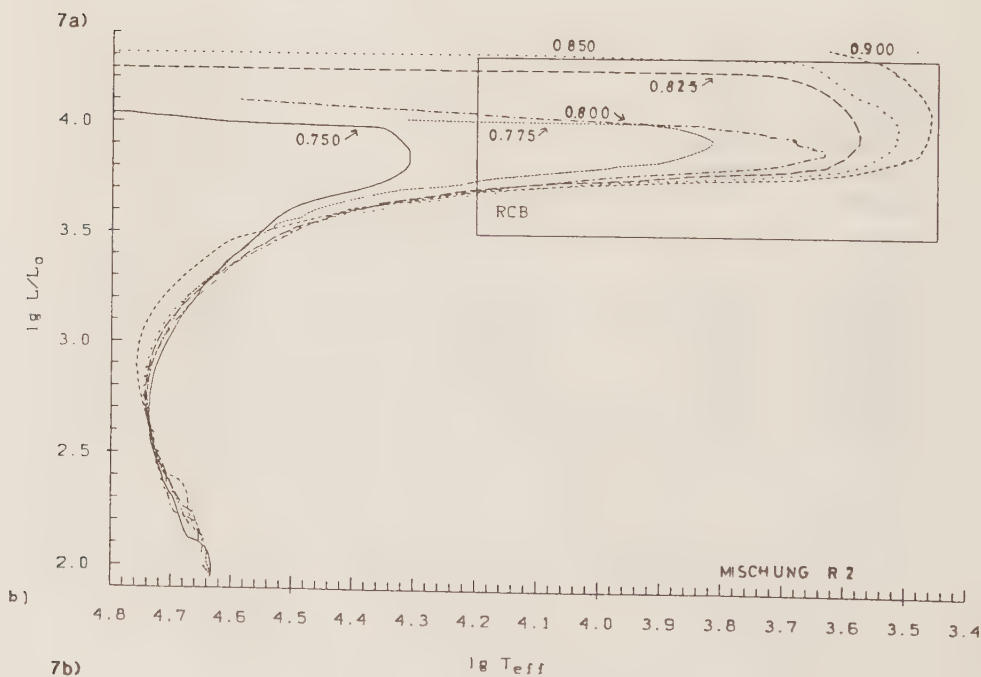
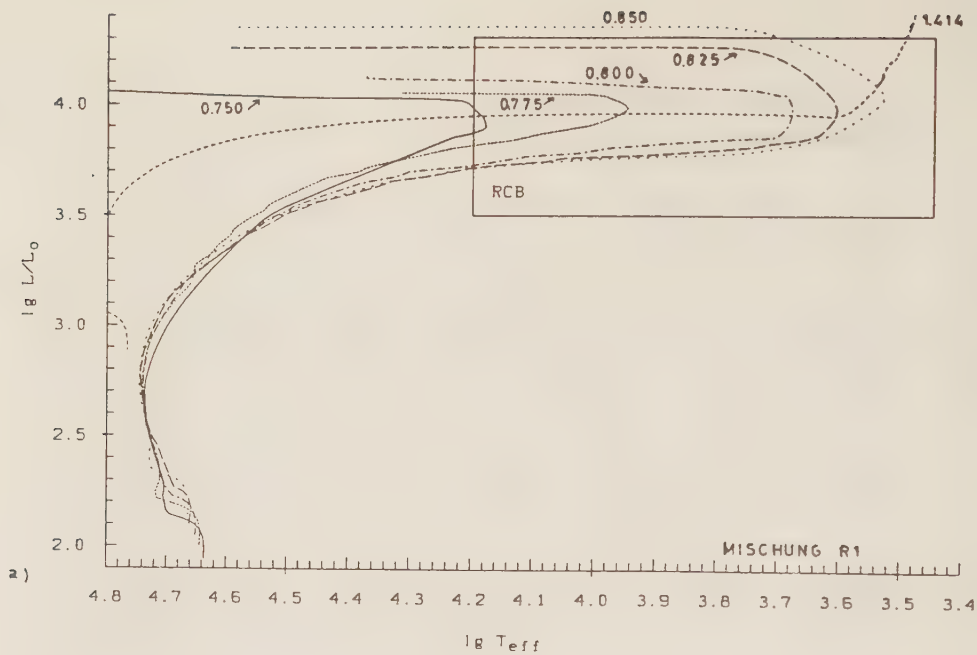
$$M/M_{\odot} = 0.7500, 0.7625, 0.7750, 0.7875, 0.8000, 0.8125, 0.8250, \\ 0.8375, 0.8500$$

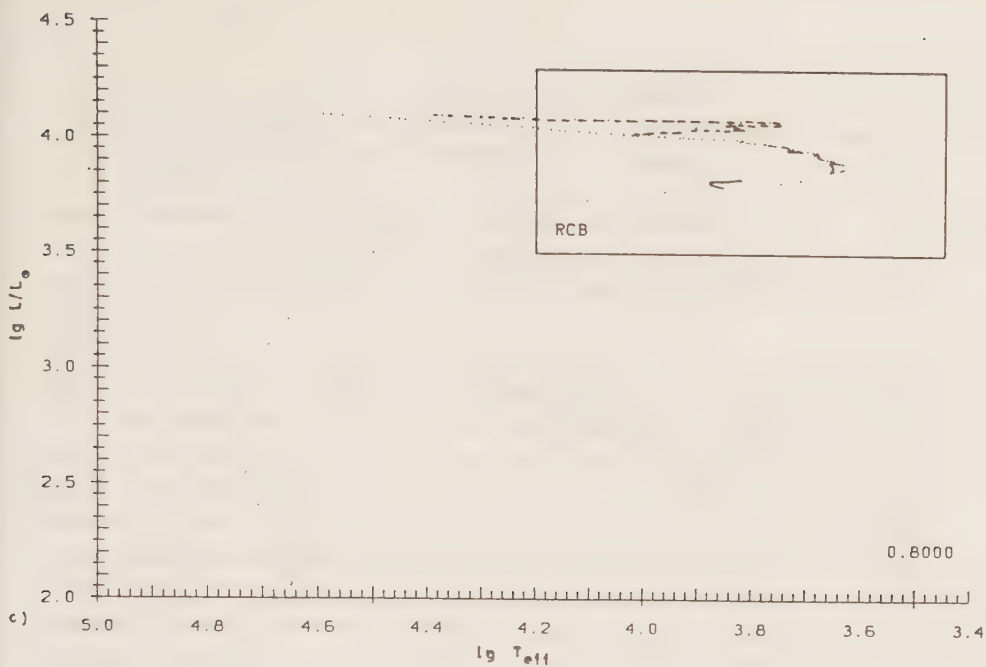
darüber hinaus 1.4142 für Mischung R1 und 0.9000 für Mischung R2.

Die Ergebnisse sind in Fig. 7a,b und Tabelle 2 zusammengefaßt.

Tabelle 2: Aufenthaltsdauer auf unterem/oberen Ast und kühlsie Temperatur

$M/M_{\odot}$	$(T_{\text{eff}})_{\text{min}}$	Verweildauer unterer Ast (10^5a)	Verweildauer oberer Ast
R1			
0.7750	3.788	1.1	1.1
0.7875	3.767	1.1	0.9
0.8000	3.676	1.0	1.0
0.8125	3.656	1.2	1.2
0.8250	3.608	1.6	1.3
0.8375	3.573	2.0	1.5
0.8500	3.530	1.9	1.5
R2			
0.7750	3.697	1.0	0.6
0.7875	3.637	1.0	0.7
0.8000	3.634	1.2	0.9
0.8125	3.618	1.2	1.2
0.8250	3.578	1.4	1.4
0.8375	3.568	1.5	1.2
0.8500	3.513	1.6	1.3





7c)

Figur 7:

Entwicklungswege einiger Modelle aus 1.4. (Massen angegeben)

a) Mischung R1

b) Mischung R2

c) Eine "Zacke" im Entwicklungsweg von $M/M_{\odot} = 0.800$ (R2) (gestrichelt), und die Wiederholungsrechnung mit kleinerem Zeitschritt (Punkte repräsentieren Modelle). Außerdem sind Testrechnungen für Zeitschrittabhängigkeit einiger Modelle in verschiedenen Phasen angedeutet (durchgezogen).

Die jeweils massereichsten Sterne beider Mischungen wurden nicht solange gerechnet, bis sie wieder Effektivtemperaturen über $10^{4.2}$ K erreichten. Bei $M/M_{\odot} = 0.9000$ (R2) geschah dies aus Rechenzeitgründen und weil der Stern den RCB-Streifen bereits verlassen hatte, bei $M/M_{\odot} = 1.41$ außerdem wegen der tiefen Temperaturen in der Atmosphäre, für die keine Werte mehr in den Opazitätstabellen vorhanden waren.

Wegen der lockeren Zeitschrittsteuerung kann es auch bei den kühlen Modellen zu einer Dejustierung der Schalenquelle kommen. Diese wird aber während der nächsten nuklearen Zeitskalen wieder korrigiert. Dies zeigt also auch, daß die Modelle, sind sie erst einmal im Roten, dort wirklich realistisch sind. Das ergab sich aus Testrechnungen, bei denen von Modellen der Weg aus Fig. 7 ausgehend mit 10-mal kleinerem Zeitschritt weitergerechnet wurde. Während die Modelle auf den unteren Ast ins Blaue teilweise zurückkehrten, wurden die Wege im Roten und auf dem oberen Ast nahezu reproduziert (Fig. 7c). Eine besonders große Zacke bei $M/M_{\odot} = 0.800$ wurde ebenfalls nochmal genauer gerechnet, was eine glatte Kurve ergab. Es muß also wiederholt werden: sind die Sterne erst einmal im kühlen Teil des HRDs, sind sie realistische Modelle. Nur der Weg dorthin ist wegen des Einflusses der Schalenquelle (Zeitschritt, Reaktionsraten) sehr unsicher.

Besonders zu erwähnen ist, daß die minimale Effektivtemperatur, die von diesen Modellen erreicht wird, deutlich niedriger ist als bei allen früheren Rechnungen. Abhängig von der Gesamtmasse werden Werte von bis zu 3300 K (bei $M/M_{\odot} = 0.8500$) erreicht. $M/M_{\odot} = 0.9000$ wird sogar - unter dem oben geäußerten Vorbehalt wegen der Opazitäten - 2500 K kühl. Damit können diese Entwicklungsmodelle als Kandidaten sowohl für die heißeren, als auch, und das ist ein neues Ergebnis, für die kühlisten RCBs angesehen werden. Die früher erreichten Temperaturen lagen bei über 5000 K (Schönberner 1977; Bliemann und Klippenhahn 1971). Das ist eine klare Folge der bei niedrigen Temperaturen deutlich höheren Opazitäten der III. Generation. Dadurch wird sowohl der radiative, als auch der konvektive Gradient höher, der wegen der extremen Superadiabasie der Konvektionszonen teilweise sogar identisch ist mit dem radiativen.

Da die Schalenquelle, deren Dichte und Temperatur praktisch nur vom Kern bestimmt wird, davon unbeeinflusst bleibt, fällt also die Temperatur über die

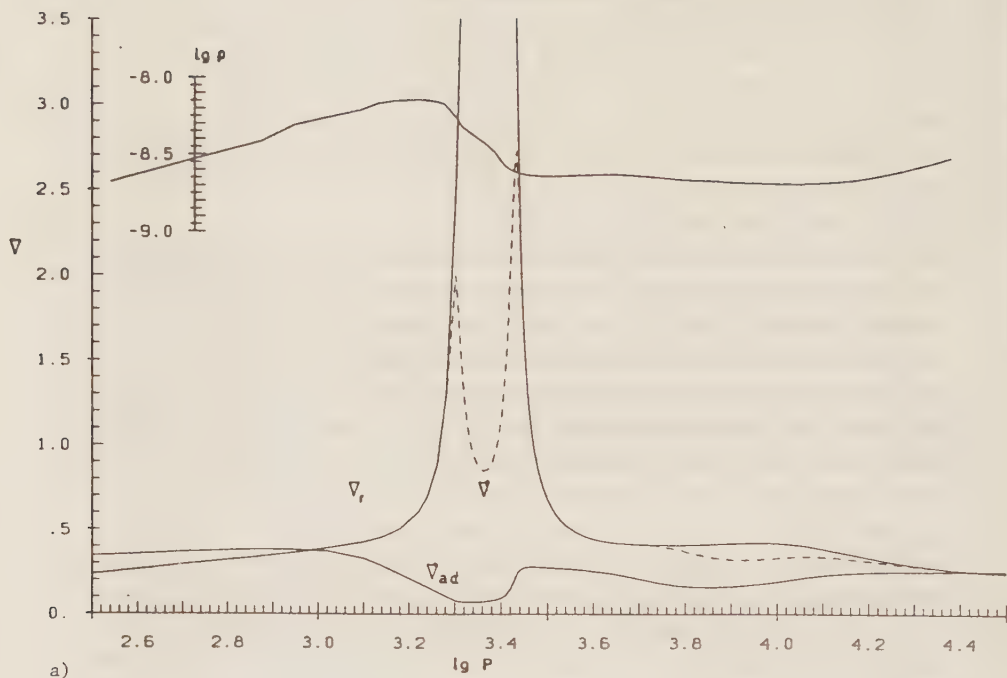
Druckskalen schneller ab, so daß, falls der Photosphärendruck nicht deutlich höher liegt, die Effektivtemperatur niedriger ist.

1.4.2. Innerer Aufbau

Im folgenden beschränke ich mich auf den inneren Aufbau von Modellen der Masse $M/M_{\odot} = .8500$ und Mischung R2.

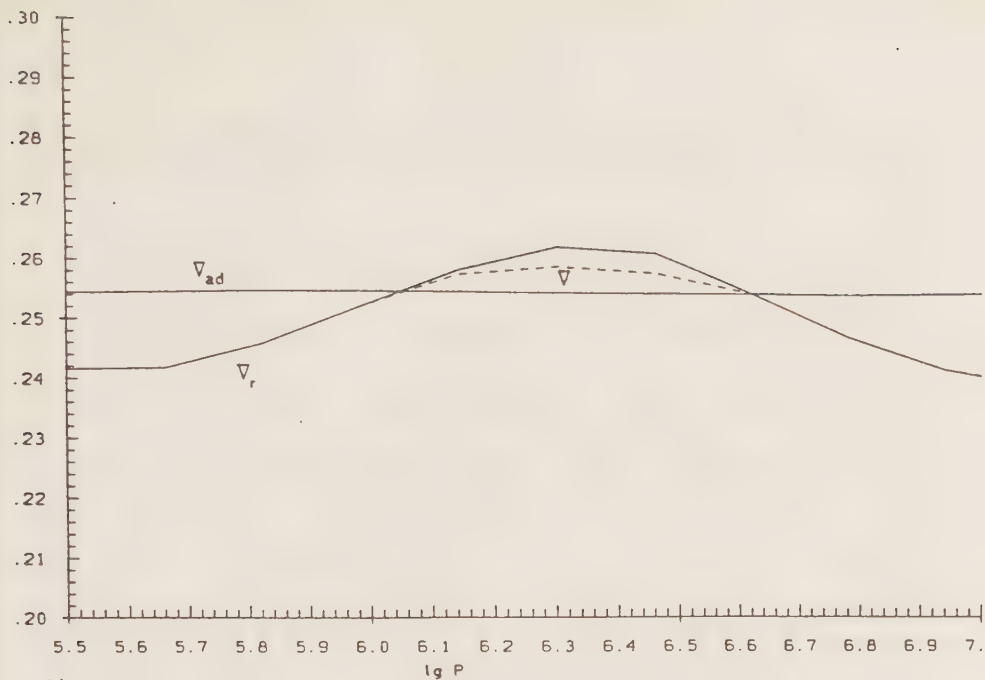
Wir beginnen mit einem sehr kühlen Modell ($T_{\text{eff}} \approx 4000$ K). Es besitzt eine teilweise stark superadiabatische äußere Konvektionszone (He^+ und He^{++} -Ionisation) zwischen $\lg P \approx 2.48$ und 4.57 , sowie eine zweite, dünne bei $\lg P = 6.3$. Das Modell ist thermisch fast adjustiert, da in der Hülle nur 1% der Leuchtkraft erzeugt und verbraucht werden. Die Schalenquelle umfaßt 8% der Masse mit dem unteren Rand bei $q = 0.76$. Die maximale Temperatur wird im Stern bei $q = 0.34$ erreicht, weiter innen kühlen Neutrinos (zentrale Entartung $\psi = 13.0$, $\lg \rho = 6.109$).

Ab jetzt steigt während der Entwicklung die Leuchtkraft mehr an, als die Effektivtemperatur fällt. Mit $\lg T_{\text{eff}} = 3.5136$, $\lg L/L_{\odot} = 3.9698$ ist der kühlsste Punkt des Entwicklungsweges erreicht. Die Konvektionszone reicht von $q = 0.998$, $\lg P = 2.39$ bis $q = 0.963$, $\lg P = 4.5$. Der Temperaturgradient (vgl. Fig. 8a für einen ähnlichen Fall) ist in den äußeren Teilen dennoch wegen der geringen Dichte ($\lg \rho \leq -8$) mit dem radiativen identisch. Ebenfalls in Fig. 8a erkennt man, daß sowohl zwischen $\lg P = 3.27$ und 3.56 als auch zwischen $\lg P = 3.74$ und 4.14 die Dichte nach innen hin abnimmt (s. auch Harpaz 1984 zu Dichteinversionen in Roten Riesen).

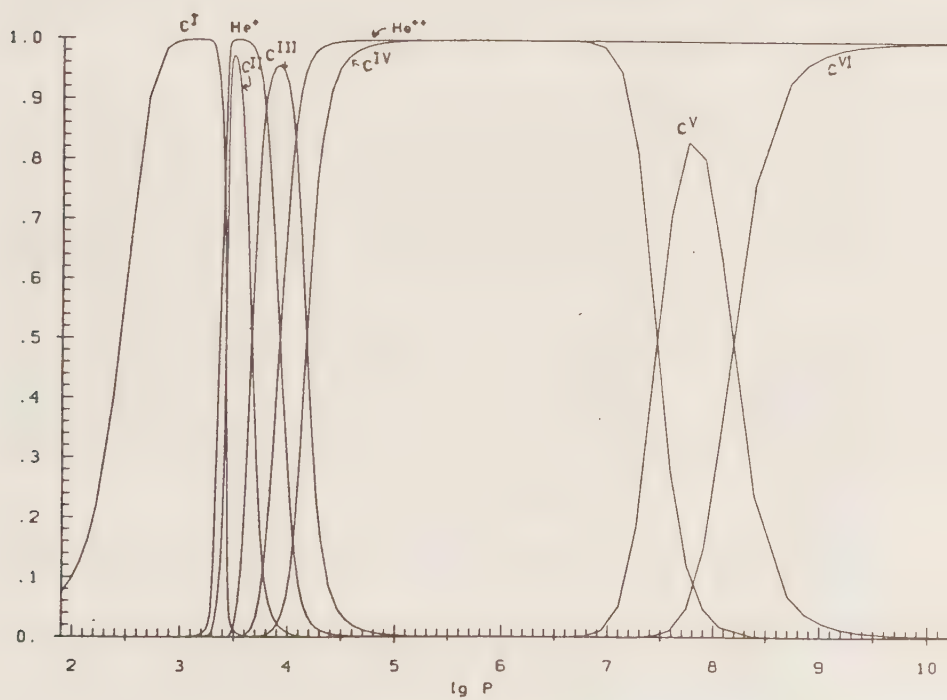


Figur 8:

- ∇ , ∇_{ad} , ∇_r und ρ in der äußeren Konvektionszone eines typischen Modells ($M/M_{\odot} = 0.800$, $R1$, $\lg L/L_{\odot} = 3.9999$, $\lg T_{\text{eff}} = 3.6996$)
- die drei Gradienten in der inneren Konvektionszone desselben Modells
- Ionisationsstufen im selben Modell



b)



c)

Die Inversionen haben verschiedene Ursachen. Schreiben wir die Zustandsgleichung in logarithmischer Schreibweise und leiten nach $\ln r$ ab, so erhalten wir

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{d \ln \beta}{d \ln r} + \frac{d \ln \mu}{d \ln r} + \frac{d \ln P}{d \ln r} (1 - \nabla), \text{ worin wir } \frac{d \ln T}{d \ln r} \text{ durch } \frac{d \ln T}{d \ln P} \cdot \frac{d \ln P}{d \ln r} =$$

$\nabla \cdot \frac{d \ln P}{d \ln r}$ ersetzt haben. In der betrachteten Schicht (Ionisationszone) des

Modells ist sowohl $\frac{d \ln \beta}{d \ln r}^*$ als auch $\frac{d \ln \mu}{d \ln r}$ positiv. Falls also $\nabla \geq 1$,

so wird der letzte Term ebenfalls positiv, und die Dichte sinkt mit abnehmendem Radius. Das ist der Fall in der äußeren Inversionsschicht. Dort wirken also alle drei Terme der rechten Seite begünstigend. In der weiter innen liegenden ist $\nabla \approx 0.35$, der letzte Term also negativ ($\frac{d \ln P}{d \ln r} \approx -3.5$, also der dritte Term etwa -2.4). Wegen der in diesem Bereich aber sehr schnellen zweiten Ionisation von Helium (Fig. 8c) ist der zweite Term etwa 2.0 und der erste etwa 1.0, so daß die rechte Seite wiederum positiv (≈ 0.6) wird. Während also außen die extreme Superadiabatie ($\nabla > 1$) zur Inversion führt, ist es innen die schnelle Änderung des Molekulargewichtes (He^{++} -Ionisation) und des Strahlungsdruckes im Verhältnis zum Gasdruck.

Die zweite konvektive Schicht, in der $\nabla_{\text{ad}} \approx \nabla_r$ ist, hat sich zwischen $q = .9609$ und $.9605$ ($\lg T = 5.15$, $\lg P = 6.3$) vertieft. Da die Heliumionisation bereits bei $\lg T = 4.8$ abgeschlossen wurde, kann es sich nur um einen Effekt der C^{III} oder C^{IV} -Ionisation handeln. Tatsächlich sieht man aber aus Fig. 8b, wo die Gradienten in einem anderen, aber ähnlichem Fall gezeichnet sind, daß zwar ∇_{ad} ganz schwach abnimmt, der radiative Gradient aber ein deutliches Maximum aufweist. Das ist auf ein kleines Maximum in den Opazitäten zurückzuführen, das sich wegen des Verlaufs des Modells im p - T -Diagramm ergibt. Möglicherweise würde es bei einer anderen Interpolationsart verschwinden. In Fig. 3 d von Sackmann und Boothroyd (1985) ist z.B. zu sehen, daß dort in einer RCB-Hülle ebenfalls ein Maximum in ∇_r vorhanden ist, das aber ∇_{ad} anscheinend nur erreicht.

Die Schalenquelle liegt zwischen $q = 0.80$ und 0.85 , ist also vergleichsweise dick.

* $\frac{d \ln \beta}{d \ln r} > 0$ gilt wegen $P = \frac{1}{1-\beta} \frac{aT^4}{3}$ immer, solange $\nabla \geq 0.25$

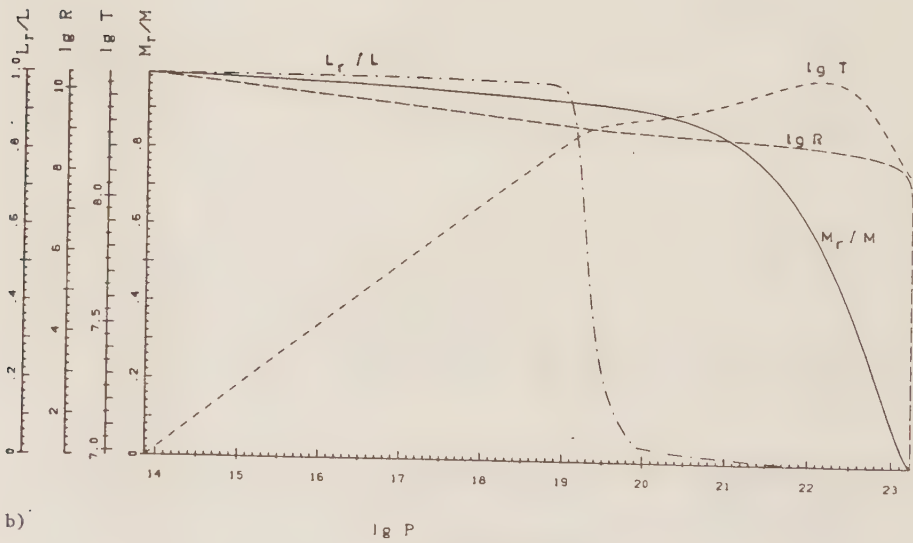
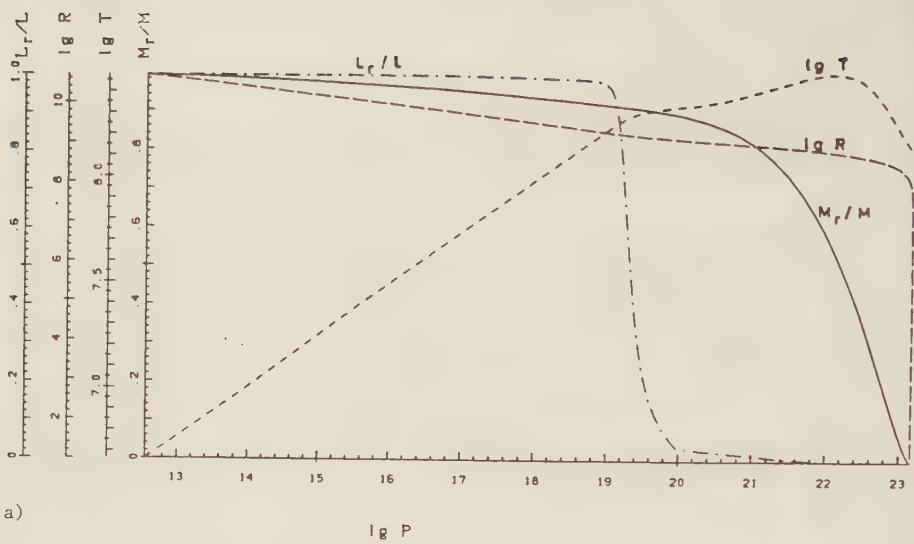
Nach diesem Modell steigt die Effektivtemperatur wieder. Ein typischer Stern ($\lg L = 4.10$, $\lg T_{\text{eff}} = 3.548$) in dieser Phase ist so aufgebaut:

Die äußere Konvektionszone ähnelt der soeben besprochenen, reicht aber nur noch bis $q = 0.974$. Die zweite ist dicker geworden ($q = 0.9728 \dots 0.9790$), liegt aber mit ihrem Zentrum bei den gleichen P - und T -Werten wie bisher. Die Schalenquelle reicht von $q = 0.868$ bis 0.910 , ist also nur unwesentlich dünner geworden. Der Druck fällt vom Rand der Schalenquelle bis zu $q = 0.99$ von $10^{18.3}$ auf $10^{3.0}$ ab, die Temperatur von $10^{8.05}$ auf $10^{4.20}$, die Dichte von $10^{2.2}$ auf $10^{-8.8}$, der Radius steigt von $10^{9.5}$ auf $10^{13.3}$. Daraus kann man entnehmen, welch extrem dünne und ausgedehnte Hüllen diese Sterne besitzen.

Bei $\lg T_{\text{eff}} = 3.662$, $\lg L/L_{\odot} = 4.253$ und nach weiteren 10^5a sind die beiden Konvektionszonen, die in ihrer Struktur und ihrem Ort in $\lg P$ unverändert blieben, in die äußersten 0.15% der Masse gewandert. Die Schalenquelle liegt zwischen $q = 0.942$ und 0.965 . Darunter könnte jetzt etwas Kohlenstoffbrennen stattfinden, das aber nicht berücksichtigt wird. Die Energieerzeugung liegt bei max. $7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{erg}}{\text{gs}}$, im Schnitt bei $10^{-10} \frac{\text{erg}}{\text{gs}}$.

Ab jetzt läuft der Stern schnell durch den RCB-Streifen. Nach weiteren $3.5 \cdot 10^4 \text{a}$ verläßt er ihn bereits. Die Konvektionszonen verschwinden, der Stern wird wieder radiativ, die Hülle wird dichter und weniger ausgedehnt ($\lg R = 12.9$). Die Schalenquelle umfaßt noch knapp 2% der Masse und wandert soweit nach außen, bis sie zu erlöschen beginnt (bei $\lg T_{\text{eff}} = 4.8$). Die Leuchtkraft sinkt ab, der Stern wird zum Weißen Zwerg (nicht mehr gerechnet).

Die Entwicklung aller anderen gerechneten Modelle verhielt sich in der gleichen Weise. In Fig. 9 ist der Verlauf der wichtigsten Größen zweier Modelle mit $M = 0.800$ (R_2) gezeichnet.



Figur 9:

Innerer Aufbau von $M/M_{\odot} = 0.800$ (R2)

a) kühlestes Modell $\lg L/L_{\odot} = 3.8851$ $\lg T_{\text{eff}} = 3.6925$

b) bei Austritt aus RCB-Gebiet $\lg L/L_{\odot} = 4.1077$ $\lg T_{\text{eff}} = 4.2023$

1.5. Entwicklung mit Massenverlust

Die meisten kühlen Sterne verlieren ständig an Masse. Zwar sind bisher keine Massenverlustraten von RCBs bekannt, doch zeigt allein schon das Phänomen der Verdunkelung, daß Materie von der Sternoberfläche abgestoßen wird. Wenn auch der genaue Vorgang unklar ist, so ist man sich doch einig, daß das Material, das die Verdunkelungen bewirkt, vom Stern selbst kommen muß. Schmidt (1965) schätzte die Verlustrate auf $10^{-8} M_{\odot}/a$, Iben und Tutukov (1985) geben $10^{-6} M_{\odot}/a$ an (ohne Quellenangabe), und Duerrbeck und Seltter (1982) erwähnen (ebenfalls ohne Zitat) $10^{-5} M_{\odot}/a$.

1.5.1. Modell und Einfluß auf Entwicklungswege

Da mir also nichts über die Verlustraten bekannt ist, man aber aufgrund der Erfahrungen mit anderen kühlen Sternen annehmen kann, daß auch RCBs Masse verlieren, habe ich auch Fälle mit Massenverlust gerechnet, um die Wirkung auf die Entwicklung zu sehen. Der Einfachheit halber wird angenommen, daß der Massenverlust der Reimers-Formel (Reimers 1975) gehorcht, d. h.

$$\dot{M} = -4 \cdot 10^{-13} \cdot \eta \cdot \frac{LR}{M} \quad (1.14)$$

worin L , R , M in solaren Einheiten und $\dot{M}$ in $M_{\odot}/a$ zu setzen ist. η ist ein freier Parameter, der ursprünglich $\eta = 1$ war. Der Massenverlust wird nicht in die Aufbaugleichungen mit einbezogen, sondern zwischen zwei Modellen zu den Zeiten t_1 und t_2 ($t_2 > t_1$) wird von M_1 die Masse $\Delta M = \dot{M}(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$ genommen. Bei großem $(t_2 - t_1)$ wird dieses Verfahren daher etwas grob, doch geht es hier nur um qualitative Effekte. Ansonsten stimmen die Rechnungen mit denen aus 1.4. überein.

In den Figuren 10a und b sind die resultierenden Entwicklungswege gezeigt, die sich für die Fälle nach Tabelle 3 ergaben. Alle Modelle sind im thermischen Gleichgewicht, wie man aus folgender Abschätzung der Zeitskalen für Massenverlust und thermische Adjustierung erkennt.

Die Kelvin-Helmholtz-Zeitskala der Hülle mit Masse M_H ist

$$\tau_{KH} = 2 \cdot 10^7 \frac{M_H^2}{LR} \quad (1.15)$$

M, L, R sind wieder in solaren Einheiten, τ_{KH} in Jahren. Typische Werte für die kühlen Modelle sind $M_H = 0.1$, $L = 10^4$, $R = 10^2$, womit $\tau_{KH} \approx 0.2$ a wird. Die Zeitskala für den Verlust der Hülle ist

$$\tau_{ML} = \left| \frac{M_H}{\dot{M}} \right| = \frac{M_H \cdot M}{4 \cdot 10^{-13} \eta LR} \quad (1.16)$$

Mit den obigen Werten und $\eta = 1$ wird also $\tau_{ML} = 2 \cdot 10^5$ a. Damit ist $\tau_{KH}/\tau_{ML} \approx 10^{-6}$. Dieser Wert ist übrigens von L und R unabhängig, da

$$\frac{\tau_{KH}}{\tau_{ML}} = 8 \cdot 10^{-6} \eta \frac{M_H}{M} \quad (1.17)$$

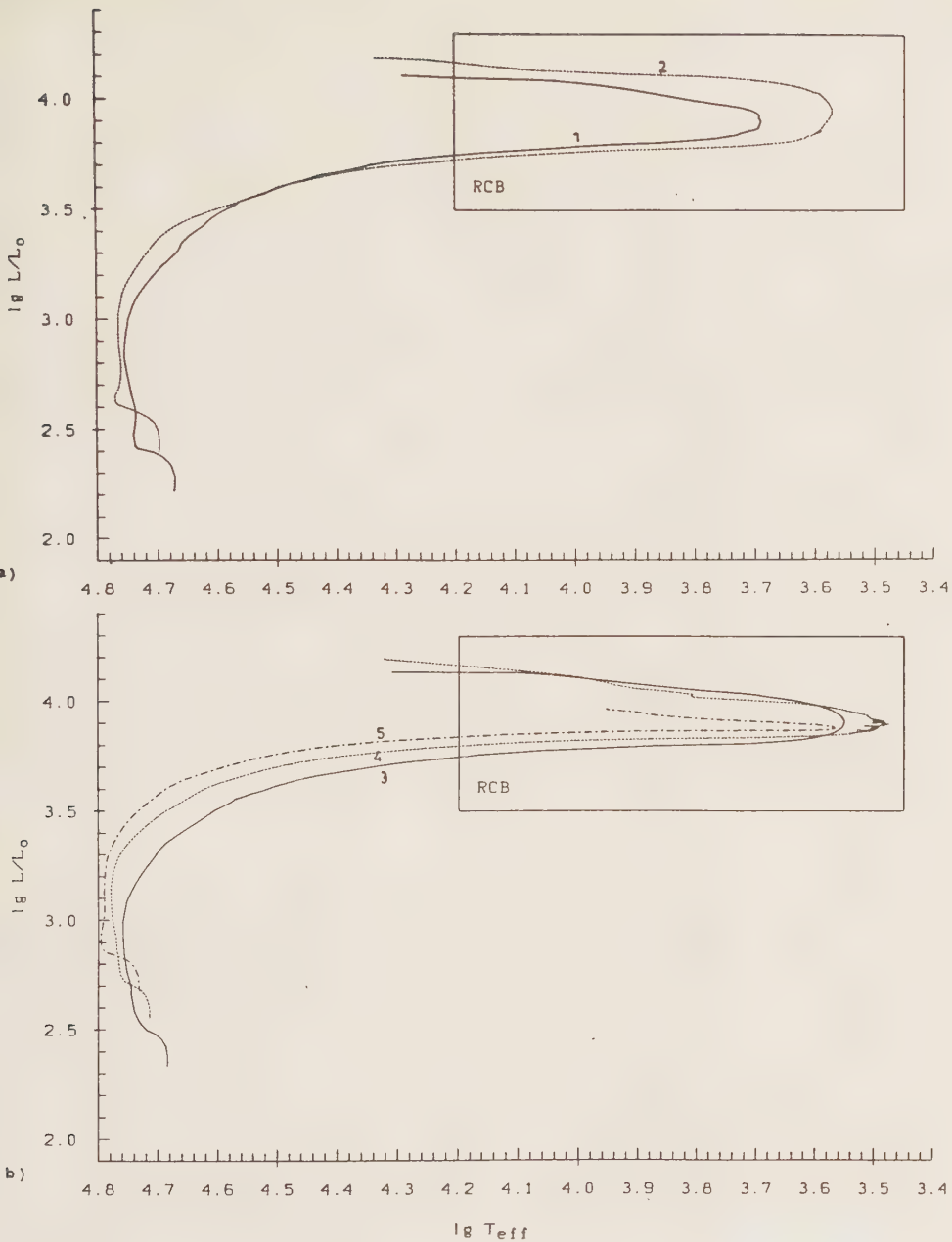
Im schlimmsten Fall ($\eta = 10$, $M_H = M$) wird $\tau_{KH}/\tau_{ML} = 8 \cdot 10^{-5}$.

Generell sieht man, daß die Entwicklungswege das RCB-Gebiet bei niedrigeren Leuchtkräften als bei den Rechnungen ohne Massenverlust wieder verlassen, und die tiefsten Temperaturen höher liegen als bei den Standardmodellen mit derselben Masse wie zum Zeitpunkt dieser minimalen Temperatur. Dort ist $\dot{M}$ mit $10^{-7} \dots 10^{-6} M_\odot/\text{a}$ am größten. (Möglicherweise stammen die oben zitierten Zahlen ebenfalls aus einer Schätzung nach der Reimers-Formel.) Bemerkenswert ist, daß trotz unterschiedlicher Verlustraten und Anfangsmassen ein enger Bereich von Endmassen erreicht wird (Tab. 3).

Tabelle 3:

Parameter für die Entwicklungsrechnungen mit Massenverlust (η aus (1.14)).

Mischung	Anfangsmasse	η	Endmasse	Bemerkung	Weg
R1	0.8875	1	0.815		1
R1	1.0000	1	0.835		2
R2	0.950	1	0.834		3
R2	1.100	2.5	0.850	nur für $T_{\text{eff}} \leq 8000\text{K}$	4
R2	1.200	10	0.868	nur für $T_{\text{eff}} \leq 10000\text{K}$	5



Figur 10:

Entwicklungswege mit Massenverlust; die Zahlen entsprechen den Parametern aus Tabelle 3.

a) Mischung R1

b) Mischung R2

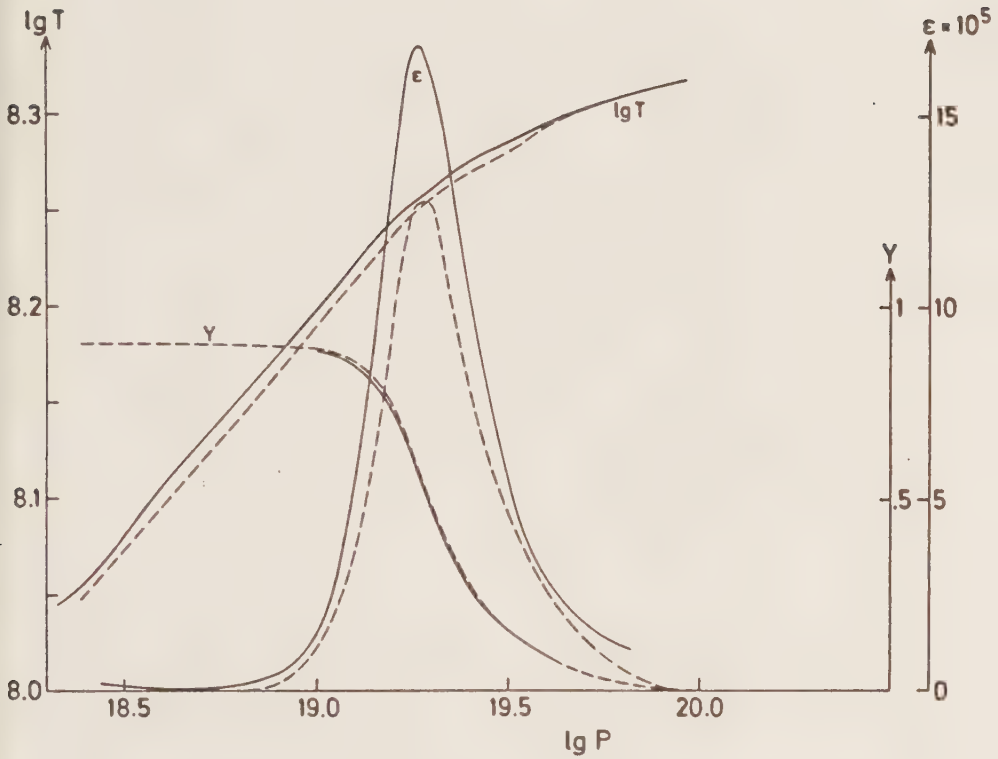
1.5.2. Innerer Aufbau

Ich skizziere kurz die Entwicklung eines $0.95 M_{\odot}$ -Sterns (R2) mit Massenverlust nach (1.14) und $\eta = 1$. Das Modell tritt mit einer Masse von $0.945 M_{\odot}$ bei $\lg L/L_{\odot} = 3.79$ nach $1.914 \cdot 10^7$ a in das RCB-Gebiet ein. Die Leuchtkraft ist ähnlich der eines Modells konstanter Masse 0.945 (abgeschätzt). Es erreicht die tiefsten Temperaturen nach $1.996 \cdot 10^7$ Jahren und bleibt dann bei nahezu konstantem T_{eff} bis $2.002 \cdot 10^7$ a. In dieser Zeit sinkt die Masse auf $0.906 M_{\odot}$; $|M|$ steigt von $6 \cdot 10^{-7}$ auf 10^{-5} an; die Schalenquelle wandert von $q = 0.67 \dots 0.76$ nach $q = 0.77 \dots 0.84$. Wir vergleichen nun ein Modell aus einer etwas späteren Phase ($M = 0.8787 M_{\odot}$, $\lg L = 3.9602$, $\lg T_{\text{eff}} = 3.5712$) mit einem Modell fester Masse ($M = 0.900$, $\lg L = 3.9802$, $\lg T_{\text{eff}} = 3.4606$), das dieselbe Kernmasse, definiert als der Punkt, wo $L_r/L = 0.5$ ist, besitzt. Die Bedingungen am unteren Rand der Schalenquelle sind identisch ($\lg P = 20.2$, $\lg T = 8.32$), am oberen Rand nahezu ($\lg P = 18.4$, $\lg T = 8.04$). Trotzdem wird im zweiten Fall mehr Energie erzeugt. Das ist in Fig. 11 dargestellt. Der Verlauf von Y und T ist im Fall der konstanten Masse optimiert, so daß ϵ maximal werden kann. Bei veränderlicher Masse ist Y bei gleichem T etwas niedriger, oder umgekehrt bei gleichem Y liegt T tiefer. Deshalb ist trotz gleicher Kernmasse die Leuchtkraft niedriger. Die höhere Effektivtemperatur ergibt sich aus der niedrigeren Gesamtmasse.

Nach $2.002 \cdot 10^7$ a ist die maximale Verlustrate ($0.9561 \cdot 10^{-6} M_{\odot}/a$) erreicht und nimmt wieder ab, da der Stern sich wieder ins heißere Gebiet des HRD zu entwickeln beginnt. Die restliche Masse ist jetzt $0.874 M_{\odot}$. Bei $\lg L = 4.09$ verläßt er den RCB-Streifen, die Masse ist $0.838 M_{\odot}$, das Alter $2.007 \cdot 10^7$ a. Die Verweilzeit im RCB-Gebiet ist $9.3 \cdot 10^5$ Jahre, die auf den oberen Ast nur $8 \cdot 10^4$ a. Das ist vergleichbar mit der eines Sternes von konstanter Masse $0.8375 M_{\odot}$. Die Leuchtkraft auf dem oberen Ast liegt aber im ersten Fall um 50% unter der im zweiten.

Wird der Massenverlust während der Entwicklung plötzlich beendet, so readjustiert sich das chemische Profil mit der Energieerzeugung auf nuklearer Zeitskala und das Modell bewegt sich auf dem üblichen Weg eines Sterns konstanter Masse zu und dann darauf weiter. Dies wurde bei den Modellen mit Anfangsmasse/ $\eta = 0.95/1$ im kühlen Bereich und $1.20/10$ bei 10^4 K auf dem oberen Ast getestet. Im zweiten Fall lief das Modell daher in 10^5 a auf seinem oberen Ast (aber bei etwas anstehenden Leuchtkräften) in entgegen-

gesetzter Richtung wieder ins Rote zurück.



Figur 11:

Verlauf von Y , $\lg T$ und ϵ in der Heliumschalenquelle von $M/M_{\odot} = 0.900$ (durchgezogen) und eines entsprechenden (s. Text) Modells mit Massenverlust ($M/M_{\odot} = 0.8787$, gestrichelt).

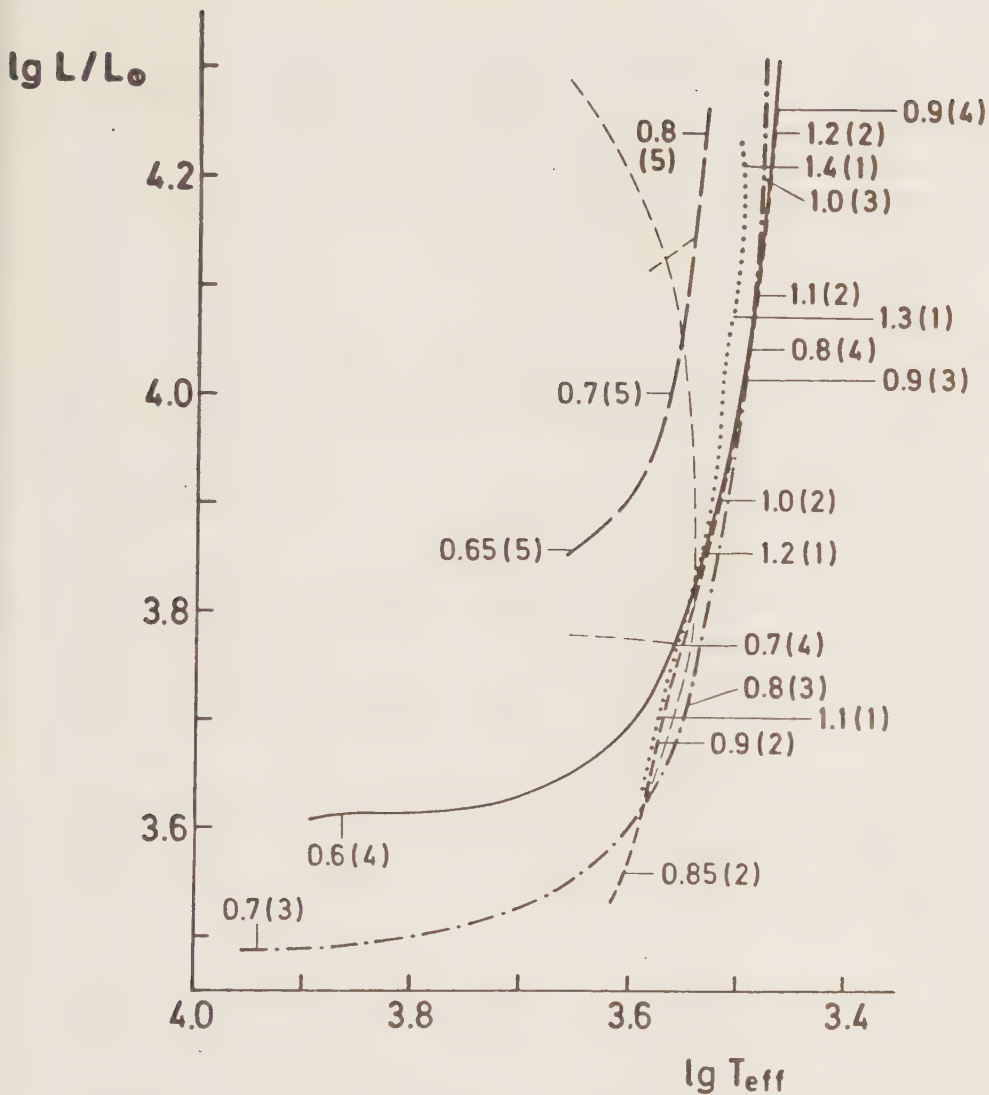
1.6. Ergänzungen

1.6.1. Verallgemeinerte Hauptreihen-Modelle

Die Annahme, daß sich RCBs von der theoretischen RCB-Hauptreihe aus entwickelt haben, ist fraglich. Ihre Vorläufer könnten auch Sterne auf dem Asymptotischen Riesenast gewesen sein, die entweder ihre wasserstoffreichen Hüllen verloren, oder aber die äußeren Schichten vollständig vermischt und zu Helium verbrannt haben. Die Modelle ab dem kühlpsten Punkt der Entwicklungswege aus 1.4 könnten solche Sterne darstellen. Sie sind jedoch (das erkennt man aus dem in 1.3 und 1.4 gesagten) nicht unabhängig von ihrer Vorgeschichte. So läuft jedes Modell, wenn die Schalenquelle nur weit genug außen ist, unabhängig vom vorgegebenen Profil sofort bei konstanter Leuchtkraft ins Blaue, wobei sich das Profil adjustiert. Wichtig sind aber auch Modelle mit vergleichbarem Profil. Zu diesem Zweck, und weil dieses Konzept schon mehrmals verwendet wurde, rechnete ich auch Modelle, deren chemische Zusammensetzung bei einem festen Wert der Massenkoordinate $M_r/M = q_0$ sprunghaft von der Kernmischung RC auf die Hüllenmischung R1 wechselt (s. auch Biermann und Kippenhahn 1971 und Weiß 1983), also statische Modelle der sogenannten Verallgemeinerten Hauptreihen. Die Ergebnisse werden hier nur kurz angeschnitten:

In Fig. 12, die Fig. 7 von Biermann und Kippenhahn (1971) entspricht, sind Linien gleichen q_0 's gezeichnet. Die Leuchtkraft für festes M und q_0 und damit fester Kernmasse $M_c = M \cdot q_0$ stimmt sehr gut mit der aus Biermann und Kippenhahn (1971) überein. (N.B.: unterschiedliche Kernchemie also ohne Einfluß, wie in 1.3.1. diskutiert!), vgl. z.B. $(M, q_0) = (1.0, 0.6)$. Ebenso verläuft die Linie $q_0 = 0.5$ bei etwas höheren Temperaturen als $q_0 = 0.6$. Für noch größere q_0 -Werte verlaufen die Kurven ebenfalls wieder mehr im Blauen. Es existiert eine starke Beziehung zwischen Kernmasse und Leuchtkraft. Das erkennt man z.B. aus den Fällen $(M, q_0) = (0.7, 0.9)$ und $(0.9, 0.7)$, $(1.0, 0.6)$, und $(1.2, 0.5)$, sowie $(0.8, 0.9)$ und $(1.2, 0.6)$.

Allerdings verlaufen alle Kurven bei wesentlich niedrigeren Effektivtemperaturen als in der zitierten Arbeit. Dort ist der tiefste Wert $\lg T_{\text{eff}} = 3.75$, hier ist er $\lg T_{\text{eff}} = 3.48$. Dieser Effekt ist auf die in den Außenschichten erhöhten neuen Opazitäten zurückzuführen, und wurde bereits in Biermann und Kippenhahn (1971) vorausgesagt.



Figur 12:

Vergemeinerte Hauptreihen (Mischung R1). Angegeben sind die Massen der Modelle, dahinter in Klammern die Nummer der Sequenzen mit festen q_0 . Dabei ist (1): $q_0 = 0.5$; (2): 0.6; (3): 0.7; (4): 0.8; (5): 0.9. Außerdem sind drei begonnene Entwicklungswege dünn gestrichelt.

Die Modelle unserer Verallgemeinerter Hauptreihen wurden mit der Version des Programms von Kippenhahn et al. (1967) erstellt, in der im Innenmodell nur adiabatisch gerechnet wird. Obwohl die Fitmasse teilweise bis auf $q = 0.7(!)$ herabgesetzt wurde, reichen die überadiabatischen Konvektionszonen noch in die Innenbereiche hinein, wo sie aber adiabatisch gerechnet werden. Die so erhaltenen Modelle, deren Effektivtemperaturen somit etwas von M_{fit} abhängen, sind also unter Vorbehalt zu betrachten.

Es ist allerdings ersichtlich, daß mit diesen statischen Modellen auch Sterne niedrigerer Masse - bis zu $0.6 M_{\odot}$ - ins RCB-Gebiet gesetzt werden können (Trimble und Paczynski 1973). Bei gleicher Leuchtkraft haben solche Modelle nämlich niedrigere Kernmassen - und damit höhere Hüllenmassen - als Entwicklungsmodelle. Der Grund dafür ist das Stufenprofil. Durch den konstanten Heliumgehalt in der Schalenquelle steigt die Energieerzeugung, die proportional Y^3 ist, bis auf $10^7 \dots 10^8 \frac{\text{erg}}{\text{gs}}$ am unteren Rand an. Zum Vergleich (Fig. 11): in Entwicklungsmodellen nur bis auf $5 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{gs}}$. Das heißt umgekehrt, daß bei gleicher Kernmasse die Leuchtkraft der Modelle auf Verallgemeinerten Hauptreihen wesentlich höher ist. Oder anders ausgedrückt, bei vorgegebener Leuchtkraft findet man eine niedrigere Gesamtmasse! Dadurch wird natürlich auch ∇_r in der Hülle größer, wodurch auch ∇ im radiativen wie im superadiabatischen Fall steigt, die konvektiven Schichten tiefer werden und damit T_{eff} sinkt. Aus eben diesen Gründen findet Schönberner (1977) eine typische RCB-Masse von $0.7 M_{\odot}$, die er ausgehend von den beobachteten Leuchtkräften von Modellen aus Biermann und Kippenhahn (1971) erhielt. Modelle mit einem realistischen Profil in der Schalenquelle hätten höhere Massen geliefert.

Anschließend ließ Schönberner die Modelle sich entwickeln. Das bedeutet, daß sich das chemische Profil der Energieerzeugung anpassen kann. Zu Beginn wird am unteren Rand der Schalenquelle, wo T und somit ϵ am höchsten ist, am meisten Helium verbrannt. Nach etwa der Zeit, die die Schalenquelle benötigt, um ihre eigene Dicke zu durchwandern, das sind etwa 10^4 Jahre, ist das Profil realistisch eingebrannt. Schönberner (1977) fand, daß sowohl $M = 1.0 M_{\odot}$, als auch $M = 0.7 M_{\odot}$ (beide bei $q_0 = 0.9$) auf Linien konstanter Leuchtkraft ins Blaue wanderten. Im ersten Fall ist die gesamte Entwicklungszeit aber gerade vergleichbar mit der Einbrennzeit, wobei die Entwicklung nach $1.5 \cdot 10^4$ Jahren ungleich schneller verläuft. Im zweiten Fall verläuft sie bereits zu Beginn schneller.

Auch in unserem Fall wurden Modelle der Verallgemeinerten Haupttreihen entwickelt. Dabei ergab sich folgendes Bild:

Im Fall $(M, q_0) = (0.85, 0.6)$ zunächst Weiterentwicklung bei nahezu konstanter Effektivtemperatur, dann Annäherung an den Rote-Riesen-Entwicklungsweg eines Modells gleicher Masse. Dabei waren zwar L und T_{eff} mit dem entsprechenden Entwicklungsmodell identisch, aber die Schalenquelle saß noch um 2% weiter innen. (Das zeigt wieder, daß mehrere Modelle bei gleicher Kernmasse möglich sind, d.h., die Entwicklung nicht eindeutig ist.) Danach folgt der Weg etwa dem üblichen bei etwas höheren Leuchtkräften. Das bedeutet, daß Modelle, die bei einer Kernmasse schon im Rote Riesen Gebiet stehen, bei der reinen Entwicklungsmodelle noch höhere Effektivtemperaturen besitzen, dies erst "vergessen" haben, wenn sich die Schalenquelle deutlich nach außen verschoben hat.

Dagegen entwickelt sich das Modell $(0.7, 0.8)$ sofort nach links im HRD (Zeitskala 10^3 a). Das Modell $(0.75, 0.9)$ läuft ebenfalls sofort nach links unten auf die normalen Modelle zu, entwickelt sich aber bald so schnell, daß es nicht mehr verfolgt werden konnte. $(0.75, 0.8)$ konnte weiter gerechnet werden; es befand sich bereits auf dem Entwicklungsweg, bevor das Profil eingebrannt war. Daraus können wir schließen, daß die künstlichen Modelle der Verallgemeinerten Haupttreihen sich dann auf nuklearen Zeitskalen dem normalen Entwicklungsweg annähern, wenn dieser etwa so tiefe Temperaturen erreicht, wie sie die statischen Modelle besitzen. Andere entwickeln sich auf nuklearer oder kürzerer Zeitskala zurück ins Blaue (je nachdem, wieviel Masse die Hülle noch hat).

1.6.2. Reproduktion älterer Ergebnisse

Zu Testzwecken wurden Modelle von Biermann und Kippenhahn (1971) unter Verwendung der Opazitätstabellen von Cox und Stewart (1965 und 1970) wiederholt. Deren Ergebnisse konnten, von kleineren Differenzen aufgrund unterschiedlicher numerischer Methoden abgesehen, reproduziert werden. Vergleichsrechnungen mit Paczynski (1971) und Law (1982) zeigten ebenfalls übereinstimmende Ergebnisse. Unterschiede ergaben sich lediglich im Alter der Modelle, die bei meinen Rechnungen systematisch niedriger liegen. Das ist die Folge der noch zu großen Zeitschritte in den erwähnten Arbeiten.

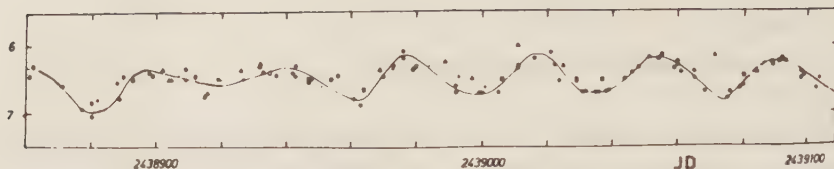
2. Pulsationen

2.1. Beobachtungen und frühere Rechnungen

Außer den völlig irregulären, drastischen Verdunkelungen zeigen mindestens die Hälfte der RCBs auch semi-reguläre Variationen mit einer Amplitude von wenigen Zehnteln einer Größenklasse. Die Lichtkurven zeigen sich verändernde Amplituden, Kurvenformen und "Perioden". Ein Beispiel für die relativ gleichmäßige Lichtkurve von RY Sgr zeigt Fig. 13, die Maracco et al. (1982) entnommen ist. Nur für diesen Stern und für R CrB (Fernie et al. 1972) wurde bisher nachgewiesen, daß die Lichtwechsel durch Pulsationen hervorgerufen werden. Man nimmt jedoch an, daß auch die restlichen Objekte, die ähnliche Variationen zeigen, und auch die meisten der übrigen RCBs pulsieren. Bei XX Cam ist die Frage nach solchen Veränderungen noch völlig offen; MV Sgr, ein sehr heißer RCB-Stern und den extremen Hellum-Sternen nahe verwandt, scheint ebenfalls nicht zu pulsieren. Tabelle 4 gibt eine Übersicht über die bisher bekannten veränderlichen RCBs. Daraus ist zu entnehmen, daß i. a. die Periode mit zunehmender Temperatur abnimmt (zumindest für die besseren Beobachtungen). Das spricht für Pulsationen, da dies der bekannten Periode-Dichte-Beziehung entsprechen würde. Ganz grob gesagt, liegen die Perioden zwischen 40 und 60 Tagen bei Effektivtemperaturen zwischen 7000 und 5000 K.

Tabelle 4: Beobachtete Pulsationsperioden von RCB-Sternen. Die Effektivtemperaturen stammen aus Kilkeny, Whittet (1984) und Walker (1985).

Stern	Periode (Tagen)	T_{eff} (K)	Ref. für Periode
S Aps	130...140	4000	Kilkeny, Flanagan (1983)
V CrA	75	4000	Bateson (1965-1974)
WX CrA	60	5000	"
RZ Nor	68 (?)	5000	"
GU Sgr	38	5000	"
RS Tel	45.8	5000	"
VZ Sgr	47	?	"
UW Cen	43	6000	Kilkeny, Flanagan (1983)
R CrB	46...50	7000	Fernie et al. (1982)
RT Nor	59\75	7000	Bateson
RY Sgr	38.7	7100	Kilkeny (1982)
XX Cam	<40	7200	Totochava (1973)
DY Cen	120 (?)	10000	Bateson
AE Cir	100 (?)	?	"



Figur 13:

Lichtkurve von RY Sgr (aus Maracco und Milesi 1982)

Die bisherigen nichtlinearen Rechnungen zur Klärung der Frage, welche RCB-Modelle pulsieren könnten, waren wenig erfolgreich. So fand z.B. Trimble (1971), daß ein Stern von $2 M_{\odot}$, $\lg L = 4.0$ und $T_{\text{eff}} = 6000$ zwar mit einer Periode von 22.4 d pulsierte, doch waren die Leuchtkraft- und Temperaturänderungen viel zu groß (2^{m5} bzw. 3000 K). Wood (1976) fand ebenfalls zu große Amplituden für pulsierende Helium-Sterne, wenn er überhaupt eine periodische Lichtkurve erhielt. King et al. (1980) fanden für $M = 1.2, 1.4 M_{\odot}$ ($\lg L = 4.05$, $T_{\text{eff}} = 6300$ K) sogar dynamisch instabile Modelle, für $M = 1.6, 2.0 M_{\odot}$ wieder mit zu großen Amplituden schwingende.

Lineare Untersuchungen, wie sie auch hier durchgeführt wurden, zeigten zwar, daß Heliumsterne (Wood 1976) oder auch Heliumsterne mit Kohlenstoffanreicherung (Cox et al. 1980) durchaus instabile Moden besitzen können, doch tauchten gleichzeitig Probleme auf, diese zu identifizieren, und daraus definitive Massen für RCBs anzugeben. Die Ergebnisse, und das ist in Cox et al. (1980) besonders eindrucksvoll betont, sind "verwirrend, unvollständig und frustrierend". In 2.3 wird dies augenscheinlich werden.

Aufgrund des Fehlens von Wasserstoff und der Tatsache, daß Konvektion in diesen Sternen nur eine untergeordnete Rolle spielt, kann erwartet werden, daß wie in den Cepheiden der κ -Mechanismus in den Helium-Ionisationszonen eine Anregung bewirkt.

2.2. Pulsationsprogramm

Wir betrachten wieder die Gleichungen (1.1) bis (1.5). Da wir jetzt auch radiale Bewegungen zulassen wollen, wird (1.2) durch den Trägheitsterm zu

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M_r} - \frac{GM_r}{r^2} \quad (2.1)$$

ergänzt. Die vier Variablen T , P , r , und L_r schreiben wir nun als Summe aus einem Gleichgewichtswert (Index 0) und einer kleinen Störung (Index 1), also

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1, & T &= T_0 + T_1, & L_r &= L_{r0} + L_{r1}, & r &= r_0 + r_1, \\ P_1 &\ll P_0, & T_1 &\ll T_0, & L_{r1} &\ll L_{r0}, & r_1 &\ll r_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Außerdem nehmen wir an, daß die Störungen folgende Zeitabhängigkeit besitzen:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = i\omega P_1, \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} = i\omega T_1, \quad \frac{\partial L_{r1}}{\partial t} = i\omega L_{r1}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial t} = i\omega r_1 \quad (2.3)$$

(mit $\omega \in \mathbb{C}$),

so daß man also z.B. schreiben könnte $P = P_0 + \tilde{P}_1 e^{i(\omega^R + i|\omega^I|)t}$. Dabei ist ω^R der Real-, ω^I der Imaginärteil von ω und $\tilde{P}_1$ unabhängig von der Zeit.

Definieren wir nun die dimensionslosen Größen

$$p = \frac{P_1}{P_0}, \quad \vartheta = \frac{T_1}{T_0}, \quad x = \frac{r_1}{r_0}, \quad \ell = \frac{L_{r1}}{L_{r0}} \quad (2.4)$$

und setzen wir (2.2), (2.3) und (2.4) in (2.1) und (1.1), (1.3) bis (1.5) ein, so erhalten wir, wenn wir nur Terme erster Ordnung in p , ϑ , x , ℓ berücksichtigen (s. z.B. Baker und Klippenhahn 1962), die Gleichungen der linearen Pulsationstheorie:

$$l' = i\sigma C_1 (C_2 \vartheta - p) \quad (2.5)$$

$$p' = -p - (4 + C_3 \sigma^2) x \quad (2.6)$$

$$x' = C_4 (3x + C_5 p - C_6 \vartheta) \quad (2.7)$$

$$\vartheta' = C_7 (l/C_{10} - 4x + C_8 p - C_9 \vartheta) \quad (2.8)$$

Dabei bedeutet der Apostroph die partielle Ableitung nach $\ln P_0$, also $\partial/\partial \ln P_0$
 $= -4\pi P_0 r_0^4 / GM_r \partial/\partial M_r$. σ ist eine ebenfalls dimensionslose Frequenz

$$\sigma = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{3GM}{R^3}}} \quad (2.9)$$

Man beachte, daß l , p , x , ϑ und σ komplex sind. Dagegen sind die C_i 's reelle Koeffizienten, die nur vom Gleichgewichtsmodell abhängen.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4\pi P_0^2 r_0^4 C_6}{L_{r0} M_r \rho_0} \sqrt{\frac{3M}{GR^3}}, & C_2 &= \frac{1}{\nabla_{ad}} \\ C_3 &= \frac{3r_0^3 M}{M_r R^3}, & C_4 &= \frac{P_0 r_0}{GM_r \rho_0} \\ C_5 &= \alpha = \left(\frac{\delta \ln \rho_0}{\delta \ln P_0} \right)_{T_0}, & C_6 &= \delta = \left(\frac{\delta \ln \rho_0}{\delta \ln T_0} \right)_{P_0} \\ C_7 &= \nabla, & C_8 &= \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P} \right)_T = \kappa_P \\ C_9 &= 4 - \kappa_T, & C_{10} &= \frac{L_{r0}^{Rad}}{L_{r0}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Der Koeffizient $1/C_{10}$ bei l auf der rechten Seite in (2.8) ergibt sich folgendermaßen (Baker und Klippenhahn 1965): Da eine einfache, anwendbare und realistische zeitabhängige Konvektionstheorie noch fehlt (s. jedoch Kuhfuß 1986), nimmt man an, daß der konvektive Fluß nicht an der Pulsation teilnimmt. Teilen wir also L_r in radiativen und konvektiven Teil $L_r = L_r^{Rad} + L_r^{Con}$, und schreiben wir wie zuvor $L_r^{Rad} = L_{r0}^{Rad} + L_{r1}^{Rad}$, und mit unserer Annahme also $L_r^{Con} = L_{r0}^{Con}$, so wird

$$l = \frac{L_{r1}}{L_{r0}} = \frac{L_{r1}^{Rad}}{L_{r0}^{Rad}} = \frac{L_{r1}^{Rad}}{L_{r0}^{Rad}} \cdot \frac{L_{r0}^{Rad}}{L_{r0}} = l^{Rad} \cdot \frac{L_{r0}^{Rad}}{L_{r0}} = l^{Rad} \cdot C_{10} \quad (2.11)$$

und damit tritt in (2.8) nur noch ℓ^{Rad} auf.

Die Randbedingungen sind ebenfalls wie in Baker und Kippenhahn (1965) gewählt:

An der Oberfläche, d. h. bei $\tau = 2/3$

$$\begin{aligned} p' &= 0 \Leftrightarrow (4+3\sigma^2)x + p = 0 \\ x^{\text{R}} &= 1, \quad x^{\text{I}} = 0 \\ \ell &= 4x + (4-\kappa_T)\vartheta - \kappa_{\text{pp}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die erste Bedingung entspricht einer adiabatisch oder isotherm und starr mit-schwingenden Atmosphäre, die zweite ist lediglich die Normalisierung der Amplituden und die Eichung der Phase, und die dritte erhält man aus der Linearisierung der Temperatur - opt. Tiefe - Beziehung.

Am unteren Rand:

$$\begin{aligned} \vartheta &= p \cdot \nabla_{\text{ad}} \\ x^{\text{R}} &= 0, \quad x^{\text{I}} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die erste Bedingung beschreibt die Forderung, daß die Schwingung adiabatisch sein soll. Deshalb muß der untere Rand so tief gewählt wrden, daß das tatsächlich der Fall ist. Die zweite ersetzt die Regularitätsbedingung im Zentrum, wenn man bis dorthin rechnen würde. Mit diesen fünf komplexen Randbedingungen ist das System von vier komplexen unbekannten Variablen und einem komplexen Eigenwert (σ) bestimmt, und kann ebenfalls mit einem Henyey-Verfahren gelöst werden.

Zur Berechnung von adiabatischen Schwingungen setzen wir $\vartheta = p \cdot \nabla_{\text{ad}}$ im ganzen Stern. Damit entfällt (2.5), und (2.8) wird nur zur Bestimmung von ℓ verwendet ("quasiadiabatische Näherung"). Damit fallen die dritte Randbedingung von (2.12) und die erste von (2.13) weg. Außerdem werden alle Größen reell, da man weder Dämpfung noch Anregung haben kann. Wird aber $\sigma < 0$, so liegt dynamische Instabilität vor.

Zur Lösung des Systems (2.5)-(2.8) mit den Randbedingungen (2.12)-(2.13) verwendete ich das in Baker und Kippenhahn (1965) beschriebene Programm. Die einzige, und in Baker und Gough (1973) beschriebene Änderung, betrifft die zweite Bedingung in (2.13). In Baker und Kippenhahn (1965) fehlte

diese, so daß σ^R aus der adiabatischen Schwingung und σ^I aus dem Arbeitsintegral geschätzt werden mußten, woraus der Stabilitätskoeffizient $\eta = -\sigma^I/\sigma^R$ ($\eta > \sigma$: Instabil gegen Pulsationen) berechnet wird. Das Arbeitsintegral (s. Baker und Kippenhahn 1962, Appendix C) wird aber weiterhin benötigt, wenn auch nur zu diagnostischen Zwecken, nämlich um zwischen anregenden und dämpfenden Zonen unterscheiden zu können. Zu Beginn der Pulsationsrechnungen wurde dazu das Arbeitsintegral, wie bei Baker und Kippenhahn (1962) beschrieben, verwendet. Prof. N. Baker wies mich später jedoch darauf hin, daß diese Form nur für reelles ω richtig ist. Da aber in der neueren Form des Programmes $\omega^I \neq 0$, mußte auch das Integral anders berechnet werden. Das ist in Baker und Gough (1979), Appendix A beschrieben. In Anhang 5.2 wird dies für die hier verwendeten Variablen wiederholt. In den Rechnungen wurde daraufhin die differentielle Form des Arbeitsintegrals berechnet, so daß man sofort aus dem Vorzeichen erkennt, ob eine Schicht an die Umgebung Energie abgibt (anregende Zone, Vorzeichen positiv).

Die Koeffizienten aus (2.10) berechnen sich ganz aus dem Gleichgewichtsmodell. In den in 2.1. zitierten Arbeiten erhielt man das folgendermaßen: Ausgehend von festen Werten für Effektivtemperatur, Leuchtkraft, Masse und chemischer Zusammensetzung integriert man die Gleichungen (1.1), (1.2) (1.4) mit (1.5) ($\partial L_r / \partial M_r = 0$, $L_r = L$) von der Photosphäre bis zu einem Punkt im Stern, der tief genug sein soll, daß die Schwingungen adiabatisch sind. Ob allerdings die Parameter tatsächlich ein Sternmodell beschreiben, bleibt ungelöst. Durch Verändern dieser Größen tastet man den Parameterraum nach instabilen Modellen ab.

Das richtige Vorgehen wäre, ein komplettes Sternmodell zu nehmen, und daraus an jeder Stützstelle die Koeffizienten der Gleichungen (2.5) bis (2.8) zu berechnen. Das bedeutet jedoch einen erhöhten Rechen- und Speicherbedarf. Der von mir eingeschlagene Mittelweg besteht nun darin, nur Außen-schichten zu rechnen, die Parameter aber von kompletten Sternmodellen zu nehmen. Physikalisch besteht der Unterschied darin, daß in C_1 und C_{10} statt L_{r0} der konstante Wert $L_0 = 1$ steht. Da aber die Schwingungen weit oberhalb der Schalenquelle bereits adiabatisch sind, besteht der einzige Fehler in der Vernachlässigung der thermisch erzeugten Energien der Hülle, die aber üblicherweise unter 1% von L liegen. Tatsächlich erbrachten einige Testrechnungen, daß die Perioden und Anregungsverhältnisse sowohl bei Verwendung einer Außenintegration, als auch der Hülle eines kompletten Modells

übereinstimmen. Ein ähnliches Ergebnis wurde auch von Temesvary (1964, unveröffentlicht) gefunden.

Das Programm zur Berechnung des Gleichgewichtsmodells aus einer Außenintegration ist mit dem Außenschichtenteil des Sternentwicklungsprogramms weitgehend identisch. Ionisation, Konvektion und Opazitäten werden völlig identisch behandelt. Auch das Integrationsverfahren nach Adams-Störmer und die Behandlung der Atmosphäre sind die gleichen. Daher sollten die Ergebnisse für eine bestimmte Hülle aus beiden Verfahren übereinstimmen, wenn die Ungenauigkeiten aufgrund der numerischen Verfahren auf ein niedriges Niveau gedrückt wurden. In mehreren Testrechnungen wurde das auch bestätigt. Ein Vergleich zweier Gleichgewichtsmodelle ist in Tab. 5 wiedergegeben. Es handelte sich dabei um ein Modell der Mischung R2 mit $M/M_{\odot} = 0.900$, $L/L_{\odot} = 8508$ und $T_{\text{eff}} = 2937$. Dieses Modell wurde gewählt, weil hier die kühle Hülle sehr tief reicht. Für die Pulsationen wurde sie bis $\lg T = 7.500$ berücksichtigt, und umfaßt damit über 13% der Gesamtmasse. Aus Tab. 5 erkennt man die gute Übereinstimmung. Die Ergebnisse der Pulsationsrechnung unter Verwendung der beiden Gleichgewichtsmodelle stimmen nicht so gut überein. Das liegt aber daran, daß dafür aus dem Entwicklungs-Gleichgewichtsmodell nur 34 (Außenschicht) + 128 (Innenmodell) = 162 Stützstellen, aus dem Außenintegrations-Modell aber 361 verwendet wurden. Trotzdem stimmt die Periode der nichtadiabatischen Schwingung in beiden Fällen überein, lediglich der Imaginärteil von σ und damit der Stabilitätskoeffizient differiert. Wegen der höheren Stützstellenzahl ist sogar dem zweiten Modell der Vorzug zu geben, weil es numerisch genauer ist.

Tabelle 5:

Vergleich zweier Gleichgewichtsmodelle für die Pulsationsrechnungen, gewonnen aus einem Entwicklungsmodell (E) und einer Außenschichtintegration (A).

lg P		lg T		lg R	
E	A	E	A	E	A
1.059	1.060	3.468	3.468	13.396	13.398
2.419	2.411	3.756	3.755	13.375	13.376
2.737	2.730	3.978	3.975	13.365	13.366
4.026	4.011	4.583	4.561	13.049	13.131
5.179	5.170	4.896	4.890	12.528	12.622
8.220	8.210	5.631	5.631	11.666	11.650
11.004	11.010	6.294	6.299	11.098	11.072
12.934	12.930	6.737	6.736	10.697	10.674
16.133	16.130	7.498	7.501	10.008	9.988

Masse Hülle: 0.163/0.166

Periode adiabatische Grundschiwung 257.25/249.86 d

nichtadiabatische 248.52/248.72

σ^I -0.299/-0.208

η 0.156/0.108

2.3. Lineare Pulsationen

Wie bereits in 2.2. erwähnt, wurden aus den Entwicklungsrechnungen von Kapitel 1 die Parameter Masse, Leuchtkraft, Effektivtemperatur und chemische Zusammensetzung genommen, um damit Gleichgewichtsmodelle für die linearen Pulsationsrechnungen zu gewinnen. Wegen der Fülle der Entwicklungsmodelle und der kleinen Massendifferenz zwischen den Sternen habe ich darauf verzichtet, alle Entwicklungswege auf Pulsationen hin zu untersuchen. Die Ergebnisse werden jetzt besprochen werden. Man beachte, daß in allen folgenden Diagrammen die Effektivtemperatur allein das jeweilige Modell kennzeichnet, die Leuchtkraft aber nicht, wie sonst in entsprechenden Diagrammen üblich, konstant ist. Da sie sich jedoch nur mäßig ändert, können die Zeichnungen durchaus verglichen werden.

2.3.1. Untersuchte Modelle der Rote Riesen-Entwicklung

Aufgrund der Ergebnisse aus den Abschnitten 1.4 und 1.3 können die Modelle auf den oberen Ästen der Entwicklungswege sowohl als Kandidaten für RCBs gesehen werden, die sich aus Vorläufern auf dem Asymptotischen Riesenast entwickelten, oder als Sterne, die sich aus homogenen Modellen bei einer höheren $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Rate entwickelt haben. Sie sind relativ gut in Effektivtemperatur und Leuchtkraft bestimmt. Dagegen sind die Modelle auf den unteren Ästen aus 1.4 stark vom verwendeten Zeitschritt abhängig. Sie sind eher als Anhalt zu verstehen. So dürfte ihre Leuchtkraft, falls ein Stern auf diesem Weg in den RCB-Bereich kommt, höher sein (vgl. 1.3). Daher werden sie in den meisten Fällen nicht betrachtet.

Außerdem findet sich in Anhang C eine Tabelle für Perioden von Modellen (reine Außenschichtenintegrationen), bei denen Effektivtemperatur, Leuchtkraft, Masse und Zusammensetzung über alle interessanten Bereiche variiert wurden.

2.3.1.1. $M/M_{\odot} = 0.825$ (Mischung R1)

In Fig. 14a sind die gefundenen Perioden für diesen Stern auf dem oberen Ast gezeichnet. Wo es möglich war, wurden bestimmte Schwingungszustände verschiedener Modelle zu Sequenzen verbunden. Denn auf den ersten Blick werden die Probleme bei dieser Art von Sternen sichtbar: da sie extrem

nicht-adiabatische Schwingungen ausführen, sind die einzelnen Moden in keiner Weise mehr den adiabatischen zuzuordnen. In Fig. 14a sind zur Illustration die adiabatischen Grund- und erste Oberschwingung mit eingezeichnet. Bei den tiefsten Temperaturen scheint zwar noch eine Zuordnung möglich zu sein, doch besitzt bereits die nicht-adiabatische Mode, die man der adiabatischen Grundschiwingung zuordnen würde, eine deutlich niedrigere Periode. Bei höheren Effektivtemperaturen ist dieselbe Schwingung aufgrund ihrer Periode eher der ersten Oberschwingung zuzuordnen. Das, was bei $T_{\text{eff}} \approx 4000$ K eine nur etwas längere Periode als diese besitzt ("I"), schneidet gar die Linie der adiabatischen Schwingung und ist bei $T_{\text{eff}} \geq 6500$ K weit entfernt, wieder als erster Oberton identifiziert zu werden.

Während im adiabatischen oder fast-adiabatischen Fall (wie bei den Cepheiden) alle Linien gleichen Schwingungszustandes schön getrennt und parallel laufen, kreuzen sie sich hier teilweise. Andere Schwingungsformen scheinen plötzlich aufzutauchen oder zu verschwinden. Alle diese Effekte wurden bereits von Wood (1976), Cox et al. (1980) und anderen gefunden. Sie sind alle auf die hohe Nicht-Adiabasie der Modelle zurückzuführen. Diese wurde besonders eingehend von Salo et al. (1984) behandelt. Der Leser sei daher auf diese Arbeit verwiesen. Die Folgen der starken Abweichung von adiabatischen Verhältnissen sind, daß

1. eine eindeutige Benennung der nicht-adiabatischen Schwingungen als "Grundschiwingung" o. ä. nicht in konsistenter Weise für alle Modelle zu treffen ist.
2. die Zuordnung von Moden verschiedener Modelle zu einem Typ nur ein Versuch bleiben muß.
3. Überkreuzungen von Moden möglich sind.
4. unter Umständen nicht alle Schwingungen eines Modells in einem Periodenintervall gefunden werden.
5. man damit nie sicher ist, alle Moden, und damit alle Möglichkeiten der Ordnung der Moden zu kennen.
6. mit jeder neu gefundenen Schwingung das ganze Bild, daß man bisher mühsam aufgebaut hat, wieder hinfällig werden kann.
7. darüber hinaus noch mehr Überraschungen möglich sind (z.B. bei $T_{\text{eff}} = 4220$ die Moden mit $\pi = 61.57$ und 60.52).

Nach diesen Vorwarnungen wollen wir nun die gefundenen Schwingungen etwas untersuchen.

Tabelle 6: Übersicht über die gefundenen Moden einiger Modelle von $M/M_{\odot} = 0.825$, Mischung R1. τ bezeichnet die Dämpfungszeit in Jahren und Q (in Tagen) berechnet sich aus der Periode-Dichte-Beziehung $Q = \pi \sqrt{\rho T \rho_{\odot}}$.

T_{eff}	$L/L_{\odot}$	Mode	Π	η	Q	τ
4072	9886	F	336.82	0.65	0.1076	-0.2249
		I	94.69	0.038	0.0303	-1.0617
		II	65.72	0.020	0.0210	0.0020
5036	15286	F	136.74	0.49	0.0596	-0.1213
		S1	97.92	-0.29	0.0427	0.1449
		I	55.31	-0.023	0.0241	1.034
		II	43.72	0.068	0.0198	-0.2783
5998	17861	S1	81.22	-0.15	0.0532	0.2231
		F	67.87	0.32	0.0445	-0.0902
		I?	36.36	-0.05	0.0238	0.3216
		?	31.24	-0.11	0.0205	0.1216
		II	23.61	0.17	0.0155	-0.0575
		?	23.16	-0.067	0.0152	0.1506
6741	17955	S1	72.34	-0.156	0.0670	0.2037
		I	25.98	-0.063	0.0240	0.1808
		?	17.97	-0.050	0.0166	0.1557
7218	17980	S1	66.81	-0.148	0.0760	0.1957
		F	34.14	0.293	0.0388	-0.0508
		I	21.49	-0.044	0.0244	0.2132

Figur 14

- a) Effektivtemperatur-Periode-Diagramm für Entwicklungsmodelle von $M/M_{\odot} = 0.825$ (R1). Instabile Moden sind mit Kreuzen bezeichnet, stabile mit Punkten, adiabatische (zum Vergleich) mit Kreisen. Die Bezeichnung (s. Text) einzelner Moden ist angegeben. Wo Moden einer Sequenz zugeordnet wurden, sind sie gestrichelt verbunden.
- b) Stabilitätskoeffizient η für vier Schwingungsformen.

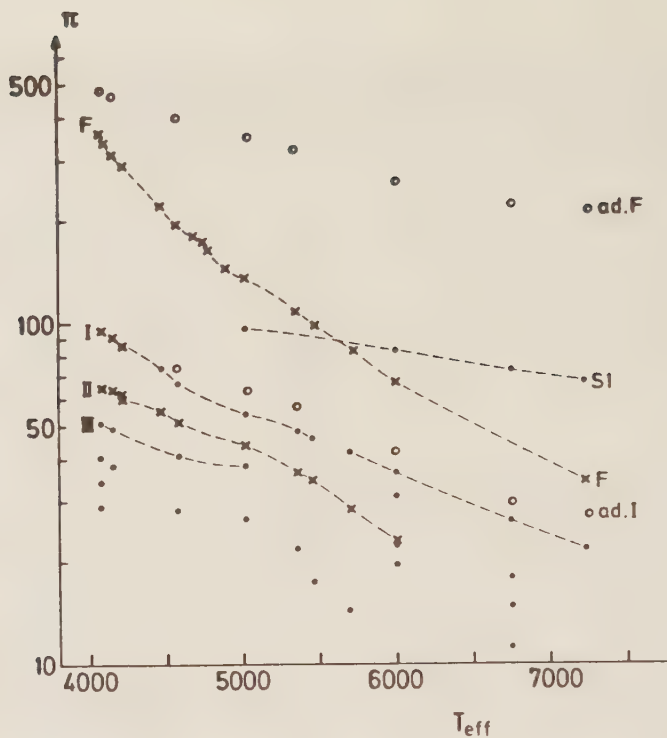


Fig. 14a

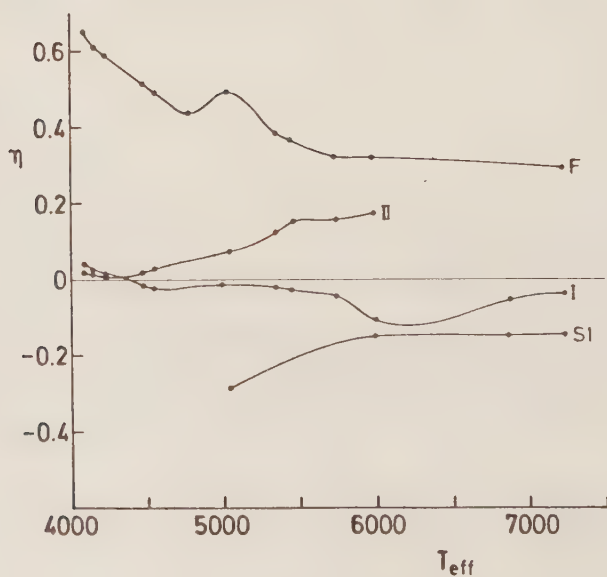


Fig. 14b

Zunächst ist erfreulich, daß es überhaupt instabile Zustände gibt. Es läßt sich sogar eine Sequenz ("F") finden, die über den ganzen untersuchten Temperaturbereich hinweg angeregt ist. Daneben gibt es noch eine Reihe höherer Moden ("II"), die ebenfalls angeregt sind, aber beim Modell mit $\Gamma_{\text{eff}} = 6741$ nicht mehr gefunden wurde, bzw. stabil ist, oder nicht mehr als Typ "II" erkannt wurde. In der Reihe "I" sind ebenfalls einige Modelle instabil. "III" und die höheren Zustände sind gedämpft. Wird $\Gamma_{\text{eff}} = 5998$, $\pi = 31.26$ zu "I" gezählt, so muß der rechte Teil von I als weitere Mode angesehen werden, die ebenso wie S1 eine andere kreuzt. (Die Bezeichnung S kennzeichnet übrigens sogenannte "strange modes" nach Cox et al. (1980), doch ist diese Bezeichnung ziemlich willkürlich, da eine Mode durchaus bei kleinem Γ_{eff} "normal" und bei höherem "strange" sein kann; siehe Saio et al., 1984.) Im übrigen ist zu bemerken, daß im gezeichneten Periodenbereich durchaus noch weitere Schwingungen entdeckt werden können. Es hängt nämlich ganz von der geschätzten Periode und dem Iterationsverlauf ab, welche Mode man findet.

In Fig. 14b ist der Stabilitätskoeffizient für die wichtigsten Schwingungszustände gezeichnet, und in Tab. 6 Daten der Pulsationen einiger Modelle. Man beachte vor allem die kurzen Dämpfungszeiten von 0.1 bis 1a. Das heißt z.B. bei einer Schwingung von Typ F, daß Anregungszeit $\approx$ Periode. Für drei dieser Modelle sind in den Figuren 15 1/ die Lösungen der Schwingungsgleichungen sowie die Phasenverschiebung zwischen l und x und das differentielle Arbeitsintegral w dargestellt:

Jeweils in den Abbildungen 15a, 16a, und 17b ist die zu "F" gezählte Schwingung gezeigt. Bei 4072 K erkennt man noch die Verwandtschaft mit der adiabatischen Grundschiwingung, da die Realteile von x und p nur einen Knoten am inneren Rand besitzen. Aus dem Arbeitsintegral sieht man, daß beide Ionisationszonen des Hellums anregend wirken, mit einem Minimum beim Ende der He^+ -Ionisation. Da diese Zonen innerhalb der konvektiven Schicht liegen, muß eine mögliche Dämpfung der Schwingung durch die Konvektion in Betracht gezogen werden. Immerhin beträgt der Anteil des konvektiven Flusses in einigen Bereichen über 40% (etwa bei $\lg P = 4.1$), in den meisten Teilen jedoch unter 1%. Die radiative Schicht unterhalb der Konvektionszone wirkt dämpfend. Ab $\lg P = 7$ befindet man sich praktisch im adiabatischen Bereich, so daß der innere Rand tief genug gewählt wurde, um verlässliche Aussagen über Periode und Stabilität zu erhalten. Bei den beiden anderen F-Moden liegen die Verhältnisse ähnlich, wenn auch x^R und p^R einen weiteren Knoten

entwickeln und die Anregung etwas zurückgeht. Die Phasenverschiebung zwischen ℓ und x ist bei den kühlen Modellen fast 0, bei 5998 K aber 30° . Die Mode S1, die in Fig. 16b bzw. 17a abgebildet ist, ähnelt bei 5998 K sehr der F-Schwingung. Man beachte allerdings die enorme Amplitude von P^I . Die in 16b gezeigte ähnelt eher einer 1. Oberschwingung. Beide Schwingungen sind unterhalb der Ionisationszone stark, die des kühleren Modells sogar in der He^+ -Zone etwas gedämpft. Da die beiden Moden sich so stark unterscheiden, handelt es sich möglicherweise um zwei verschiedene Typen. Auch die Phasenverschiebung bei 5958 K ist wesentlich höher als bei 5036 K.

Eine Schwingung des Typs I, die ebenso wie die F-Moden angeregt und noch als 1. Oberschwingung zu erkennen ist, ist in Fig. 15b gezeigt; sie hat auch zwei Knoten. Sie ist noch angeregt, wobei aber zwischen den beiden Ionisations- und Anregungszonen bereits eine dämpfende zu erkennen ist. Auch wirkt die He^{++} -Ionisation nicht mehr so anregend wie bei der F-Schwingung. Bei heißeren Modellen überwiegt bereits der stabilisierende Effekt, die He^{++} -Zone übt praktisch keine Anregung mehr aus. Das liegt an den in diesem Bereich niedrigen Amplituden.

Zuletzt ist die bei tiefen Effektivtemperaturen noch leicht angeregte II-Schwingung in Fig. 15c als Beispiel dargestellt. Hier wirkt praktisch nur die He^+ -Zone anregend.

Aus den bisherigen Arbeiten (z.B. Cox et al. 1980) ist zu entnehmen, daß bei einem Stern mit $M/M_\odot = .825$ und $\lg L/L_\odot \geq 4.2$ der Instabilitätsstreifen für die Grundschwingung (bzw. F-Mode) bis Temperaturen deutlich über 10000 K reichen sollte. Zwar habe ich nicht exakt dieses blaue Ende finden können, doch konnte bei einem Modell mit $T_{\text{eff}} = 17976$ K keine instabile Schwingung festgestellt werden. Das rote Ende bleibt völlig offen, da der Stabilitätskoeffizient zu kühlen Temperaturen hin immer weiter ansteigt, und der Einfluß der (vernachlässigten) Konvektion nur qualitativ geschätzt werden kann.

Die Moden I und II dürften bei $T_{\text{eff}} < 4500$ K, wo sie nach den Ergebnissen nur schwach angeregt sind, durch Konvektion stabilisiert sein. Da II bei höheren Temperaturen nicht mehr gefunden wurde, könnte sie schon ab etwa 6500 K stabil sein. Alle anderen Schwingungen sind nicht angeregt.

Der Anregungsmechanismus ist eindeutig der κ -Mechanismus in der He^+ -Ionisationszone. Praktisch alle Modelle dieser Entwicklungssequenz sind dort angeregt. Ob das Modell aber tatsächlich schwingt, entscheidet die zweite He-Ionisationszone. Nach den Ergebnissen reicht die Anregung nur bei den F-Moden aus, den Stern schwingen zu lassen. Ein Einfluß des Kohlenstoffs und seiner Ionisationsstufen auf die Schwingungen ist nicht zu sehen.

Figur 15:

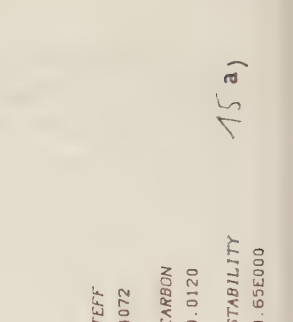
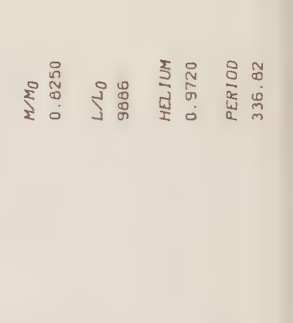
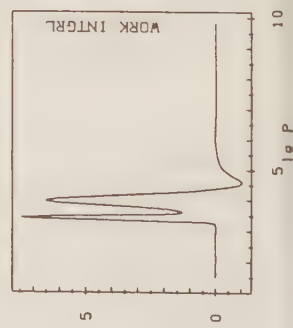
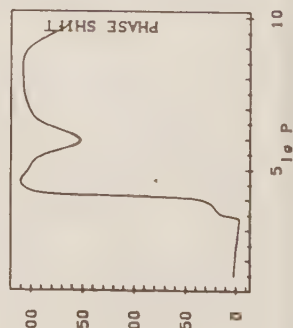
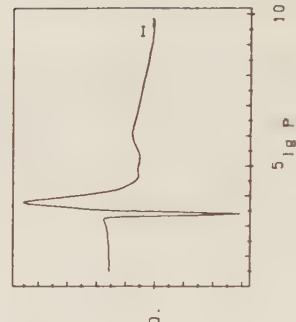
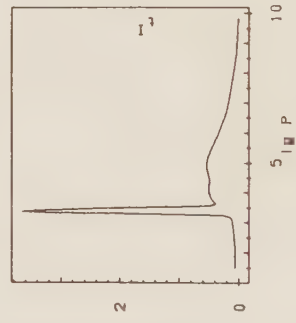
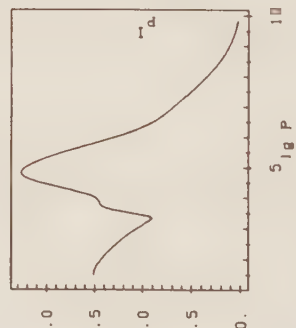
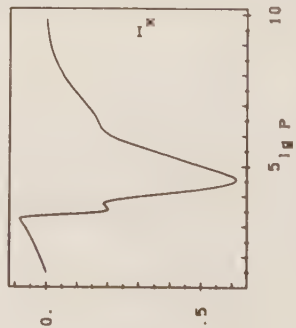
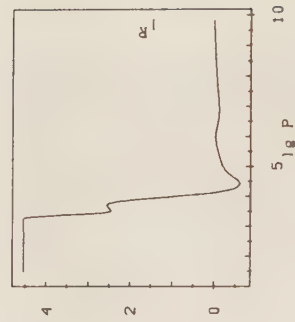
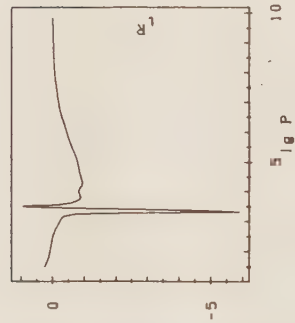
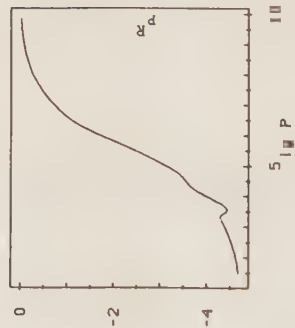
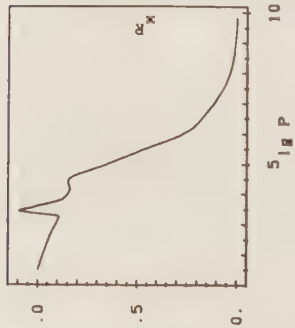
a-c: Drei nicht-adiabatische Schwingungen eines Modells der Masse $M/M_{\odot} = 0.825$ (Parameter angegeben) $T_{\text{eff}} = 4072$. Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe der Ordinaten.

Figur 16:

a-b: Zwei Schwingungen eines anderen Modells derselben Entwicklungssequenz ($T_{\text{eff}} = 5036$)

Figur 17:

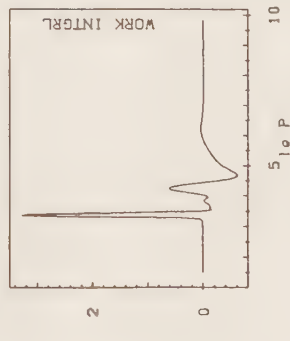
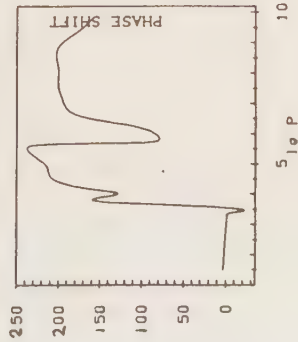
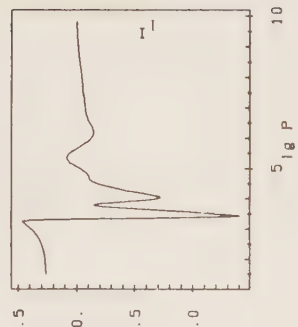
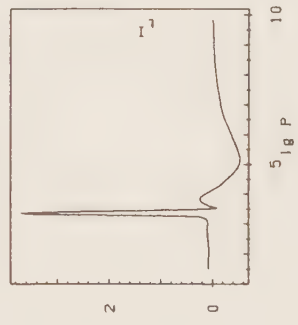
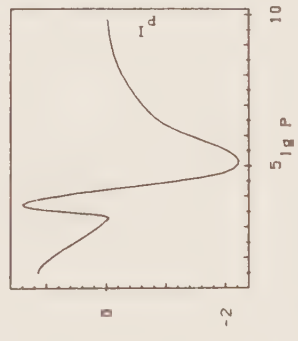
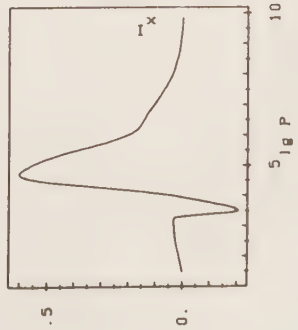
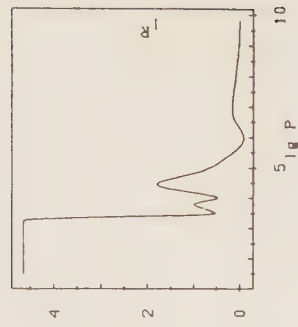
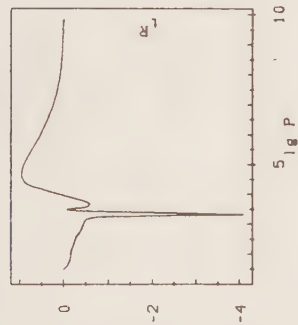
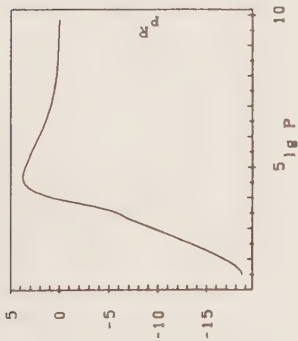
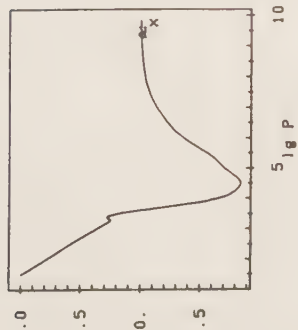
a-b: Wie 16, $T_{\text{eff}} = 5998$



M/Mg 0.6250
L/L0 9886
HELIUM 0.9720
PERIOD 336.82

TEFF 4072
CARBON 0.0120
STABILITY 0.65E000

15 a)



M/M_0
0.8250

L/L_0
9886

HELIUM
0.9720

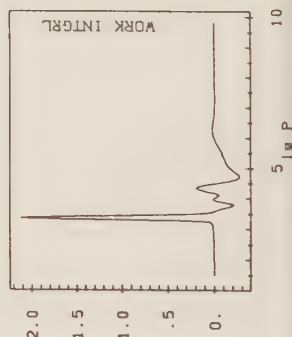
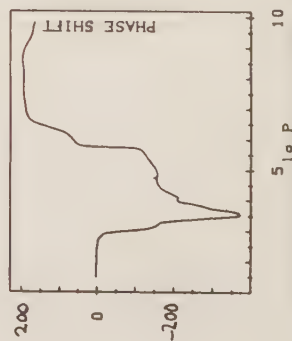
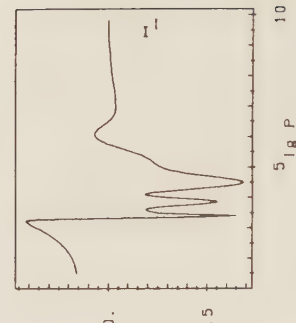
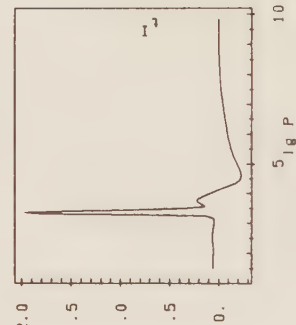
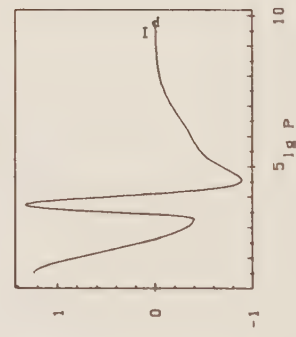
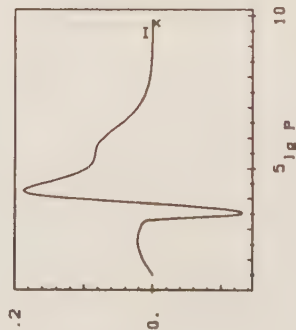
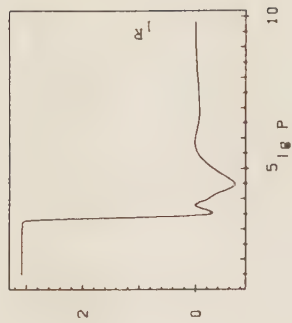
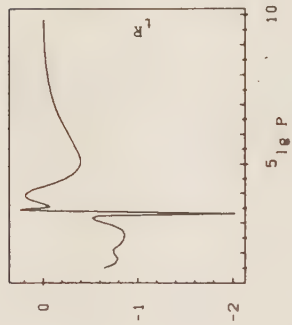
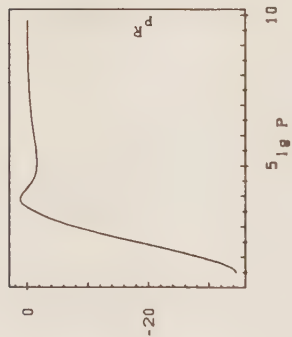
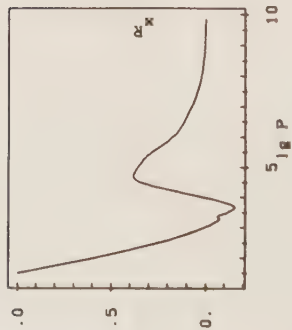
PERIOD
94.69

TEFF
4072

CARBON
0.0120

STABILITY
0.39E-001

15 b)



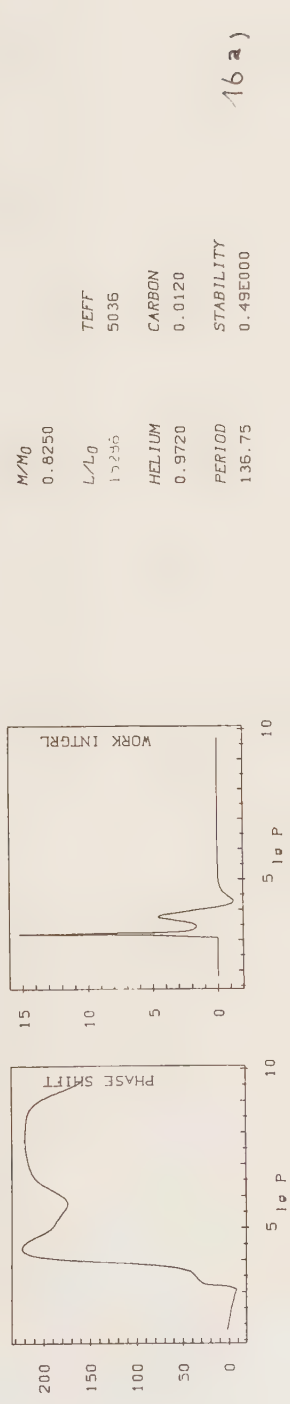
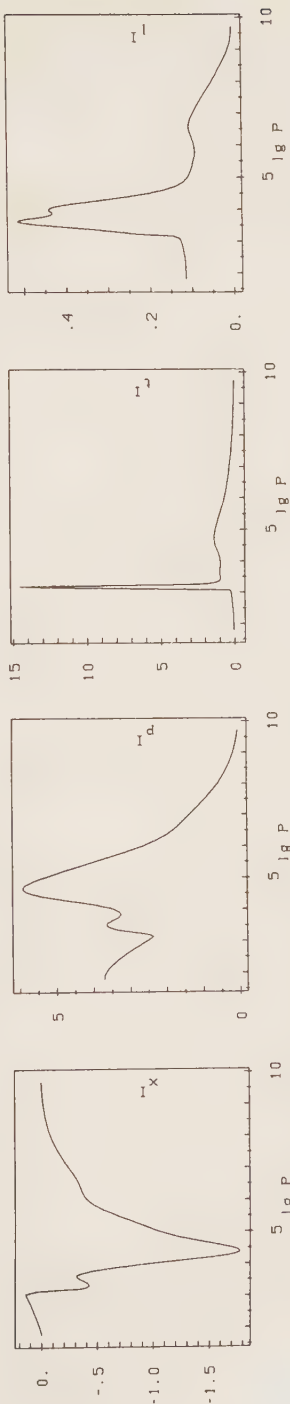
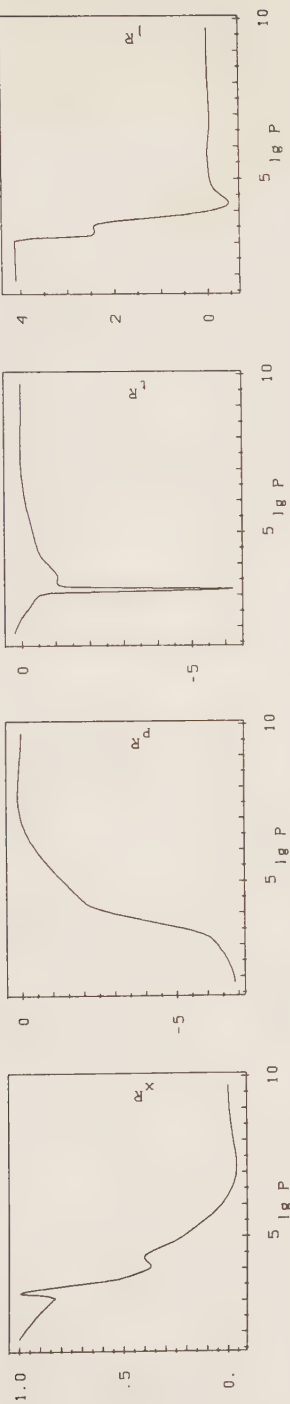
M/M₀ 0.8250
L/L₀ 9886
HELIUM 0.9720
PERIOD 65.72

TEFF 4072

CARBON 0.0120

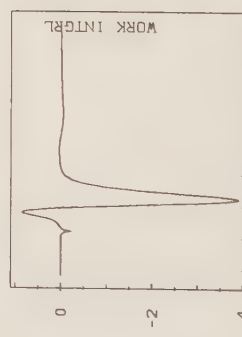
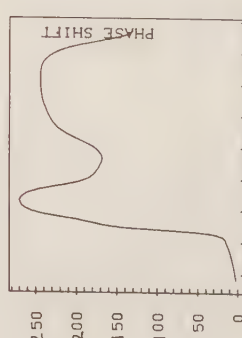
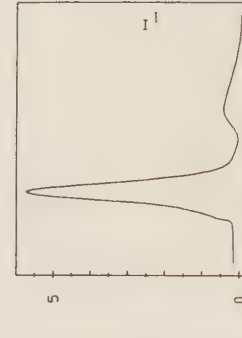
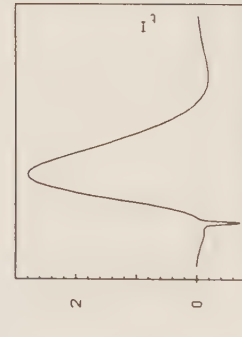
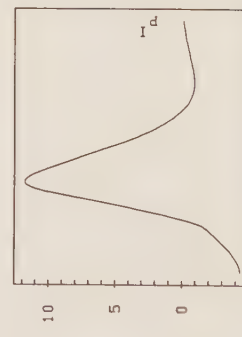
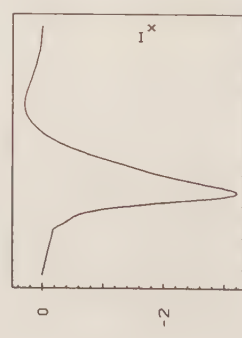
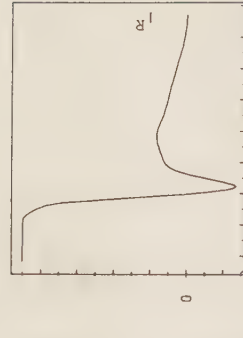
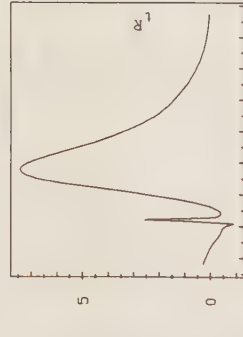
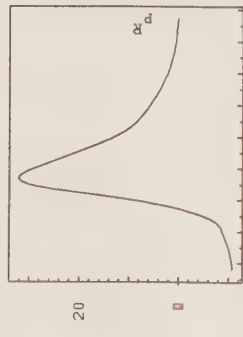
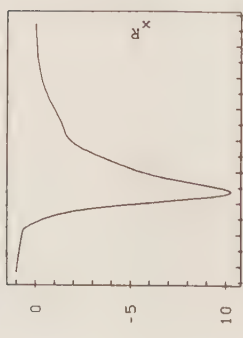
STABILITY 0.20E-001

15 c)



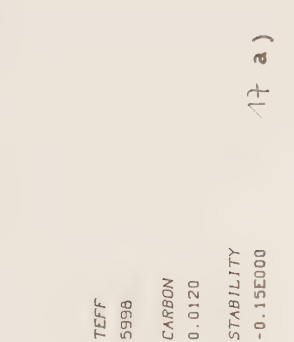
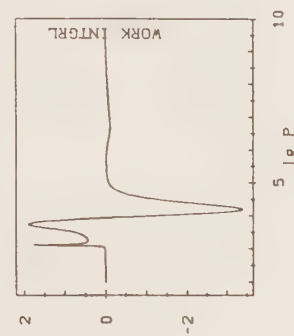
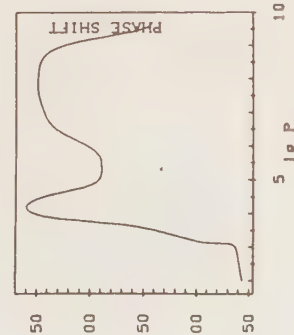
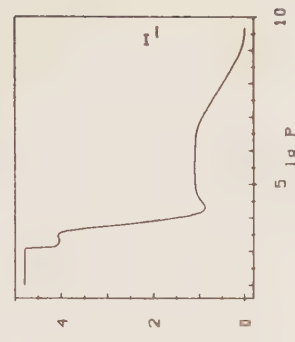
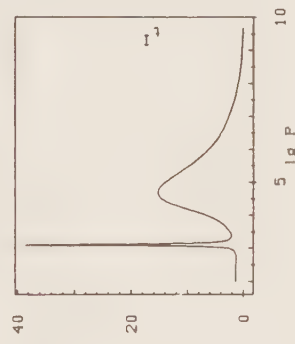
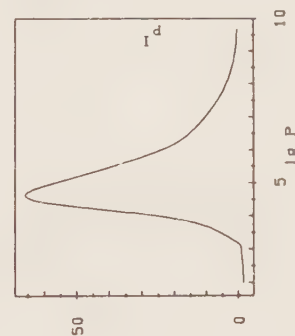
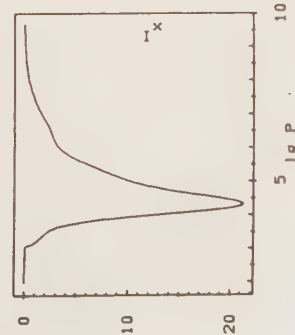
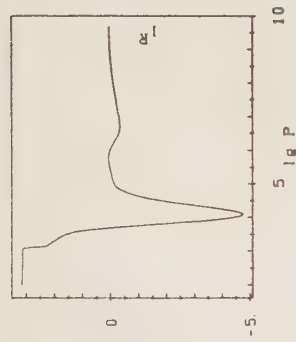
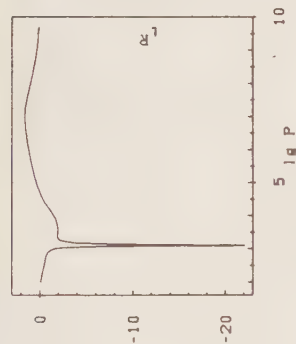
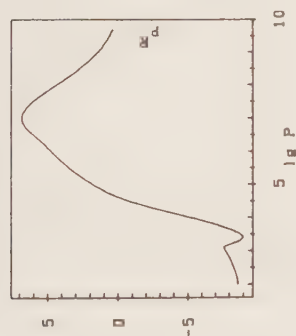
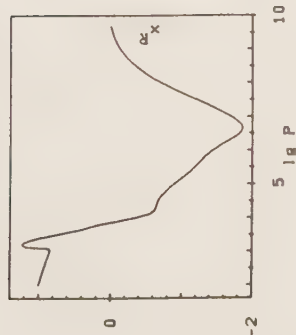
TEFF 5036
CARBON 0.0120
STABILITY 0.49E000

M/M_0 0.8250
 L/L_0 1.0296
HELIUM 0.9720
PERIOD 136.75



M/M_0 0.8250
 L/L_0 15286
 HELIUM 0.9720
 PERIOD 97.92
 CARBON 0.0120
 5036
 TEFF
 STABILITY -0.29E000

16 b)

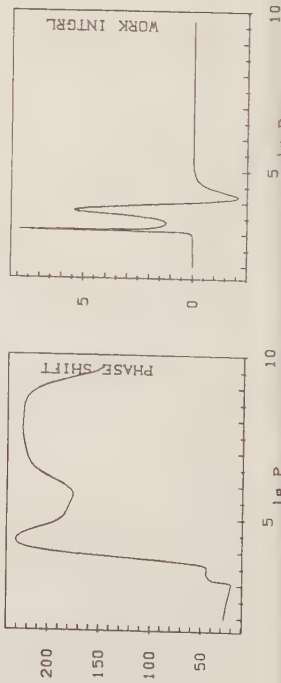
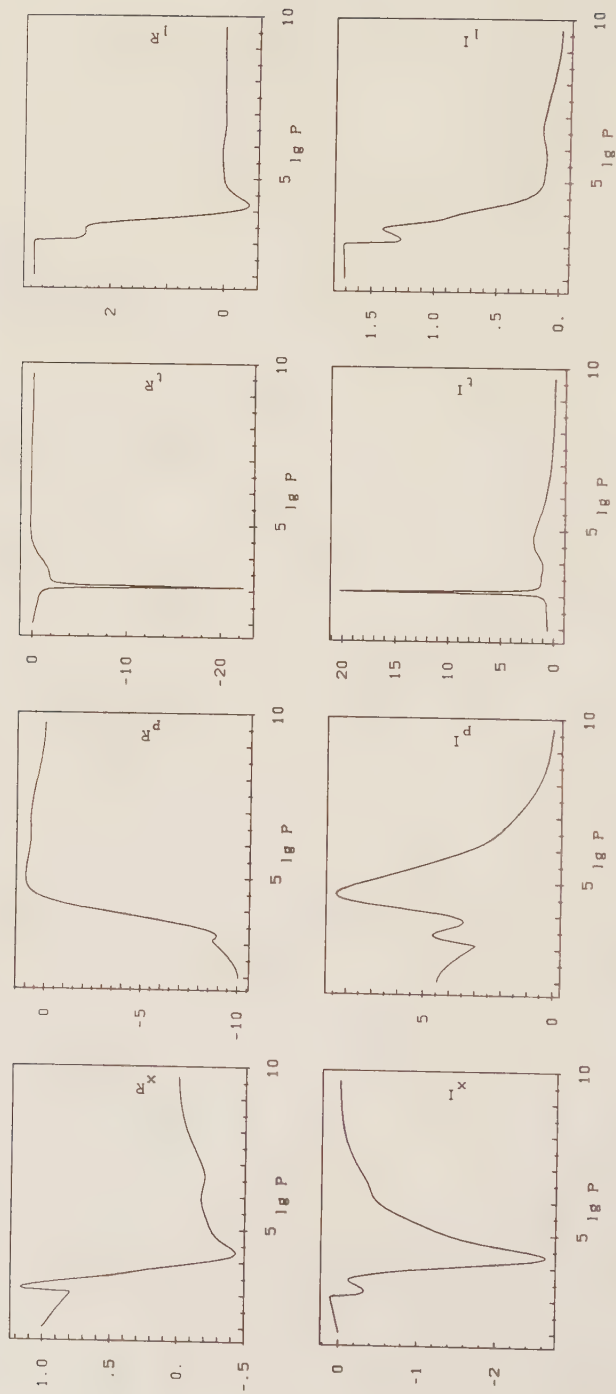


M/M_0 0.6250
 L/L_0 17861
 HELIUM 0.9720
 PERIOD 61.22

TEFF 5998
 CARBON 0.0120

STABILITY -0.15E000

17 a)



M/M_0 0.8250
 L/L_0 17861
 HELIUM 0.9720
 PERIOD 67.87
 CARBON 0.0120
 STABILITY 0.32E000
 TEFF 5998

2.3.1.2. $M/M_{\odot} = 0.800$ (R1)

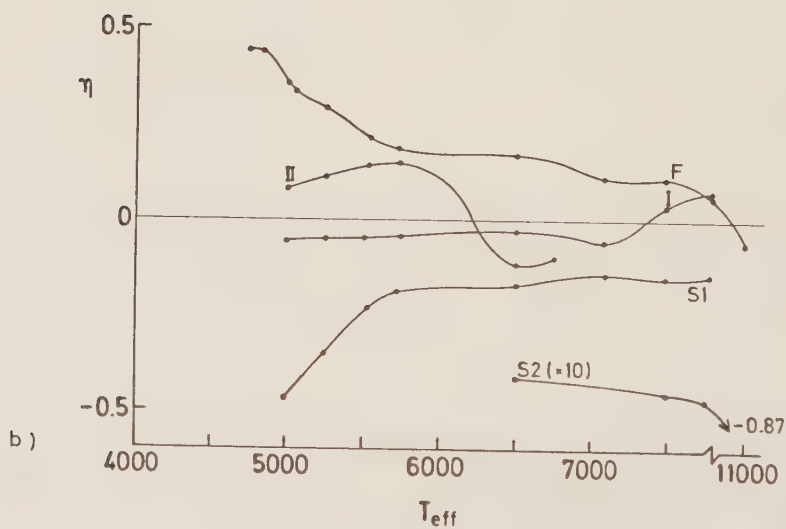
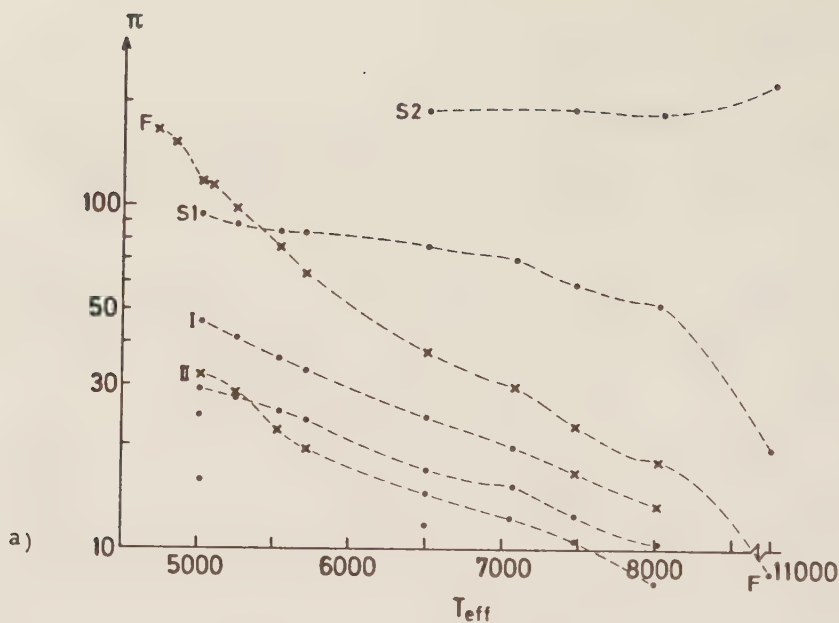
In Fig. 18a ist wieder das Perioden-Effektivtemperatur-Diagramm für diese Modellreihe gezeigt, und in Fig. 18b die dazugehörigen Stabilitätskoeffizienten. (s. auch Fig. 19 für einige Arbeitsintegrale). Im wesentlichen sind die Ergebnisse die gleichen wie im vorigem Fall. Folgende Unterschiede bestehen:

Die Perioden von F sind bei gleichem T_{eff} für die massereicheren Modelle (2.3.1.1.) größer. Bei 7000 K ist der Unterschied immerhin 10 Tage, das sind 30% der Periode von $M/M_{\odot} = 0.825$. Für die Moden I und II gilt ähnliches. Anders S1: hier sind die Perioden nahezu identisch.

Die Anregungsverhältnisse stimmen ebenfalls überein. F ist bis zu 11000 K angeregt, bei 11066 K wurde ein Modell gefunden, das stabil ist. Der Grund liegt darin, daß die hauptsächlich treibende He^+ -Zone fast aus dem Modell gewandert ist, und somit wegen der geringen Dichten kaum noch anregend wirkt. Damit überwiegt die radiative Dämpfung im Inneren (Fig. 19c). Die niedrigere Temperatur des blauen Endes des Instabilitätstreifens ist nach Cox et al. (1980) wegen der niedrigeren Masse gegenüber 2.3.1.1. nur zu verstehen, wenn auch die niedrigeren Leuchtkräfte der Modelle mit $M/M_{\odot} = 0.800$ berücksichtigt werden. Mode I, so sieht man aus den beiden Fällen, ist sowohl bei kühlen als auch bei höheren Temperaturen (≥ 7500 K) angeregt. Dort ist η sogar größer als bei F. Bei II sind keine neuen Erkenntnisse zu erzielen.

Insgesamt ist dieser Fall übersichtlicher als der erste. Das mag daran liegen, das $L/M \approx 14000$, während bei $M_{\odot} = .825$ $L/M \approx 20000$ ist. Nach Salo et al. (1984) aber werden die Modelle umso nichtadiabatischer – bei gleicher Effektivtemperatur –, und damit die Modentypen weniger erkennbar, je höher L/M ist.

Die in diesen Modellen neu gefundene Mode S2 ist eine direkte Folge der Tatsache, daß das Differentialgleichungssystem nicht mehr vom Sturm-Liouville-Typ wie das adiabatische ist. Damit existiert auch kein kleinster Eigenwert σ und somit keine größte Periode II. Damit können bei immer längeren Perioden immer neue Moden gefunden werden. S2 ist so eine, und wurde bereits bei Salo et al. (1984) entdeckt. Das differentielle Arbeitsintegral dieser Mode des Modells $T_{\text{eff}} = 7440$ ist in Fig. 19b dargestellt. Interessant ist vor allen Dingen, das beide Helium-Ionisationszonen dämpfen,

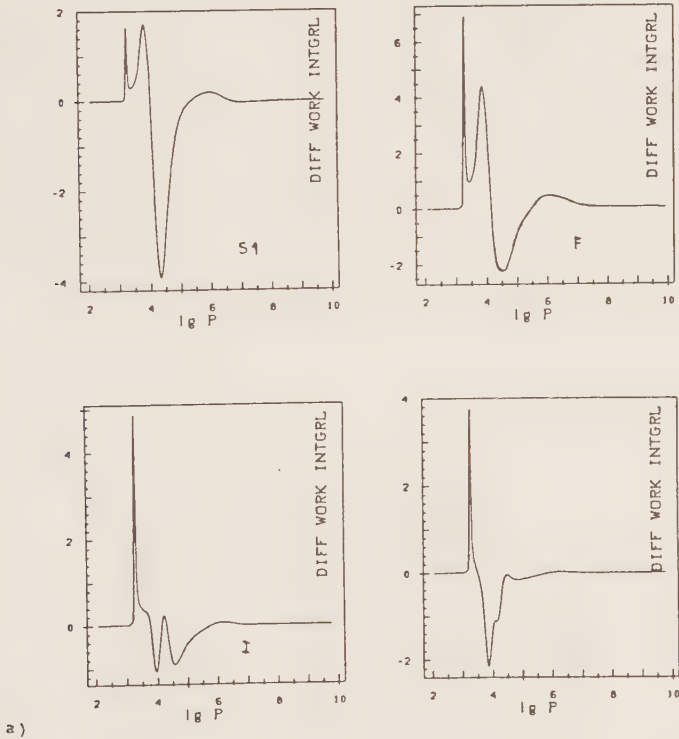


Figur 18:

a) Moden von 0.800 (R1), Erläuterung wie Fig. 14a

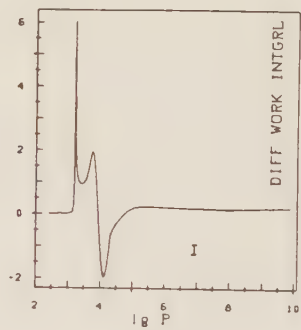
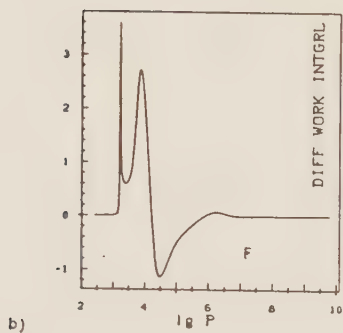
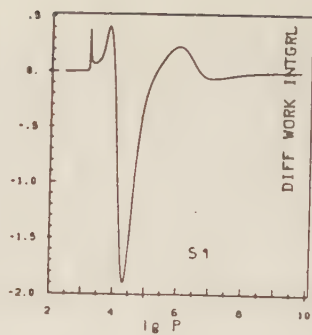
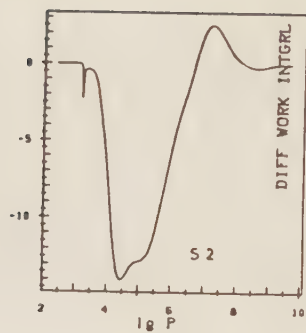
b) Stabilitätskoeffizienten für Moden aus Fig. 18a

besonders aber die noch weiter innen gelegenen Schichten. Bei $\lg P = 7.2$ ist dagegen wieder eine Anregungszone zu finden. Bei den anderen Moden sind diese Zonen längst adiabatisch. (In S1 liegt ebenfalls weiter innen eine anregende Zone; He^+ und He^{++} aber wirken ebenfalls destabilisierend.) Der Stabilitätskoeffizient ist -4.54 , das ist gut eine Größenordnung mehr als für "normale" Schwingungen üblich. Dementsprechend ist die Dämpfungszeit auch 0.017 a, also nur 6 Tage (!) bei einer Periode von 184 d. Diese Mode wird also tatsächlich sofort weggedämpft, falls sie in der Entstehung begriffen sein sollte.

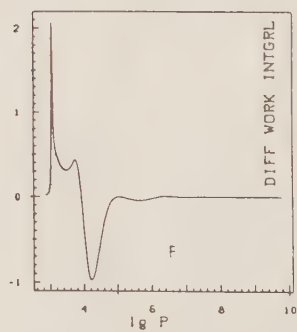
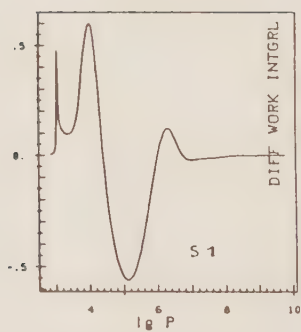


Figur 19:

Differentiales Arbeitsintegral w für mehrere Moden der Modelle mit $M/M_{\odot} = 0.800$ (R1) und $T_{\text{eff}} = 5551$ (a), 7440 (b), 11066 (c).



b)



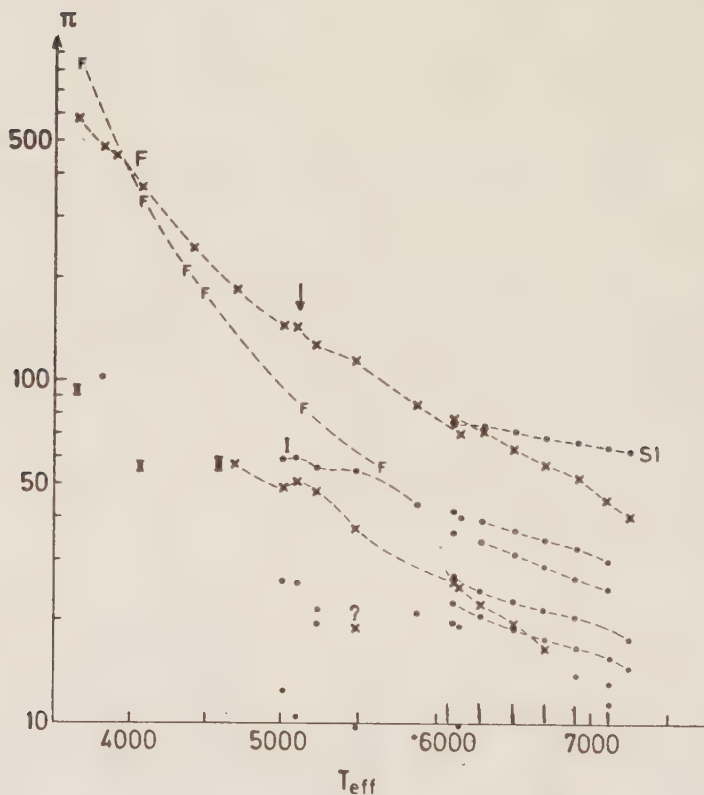
c)

2.3.1.3. $M/M_{\odot} = 0.850$ (R1)

Bei der Untersuchung der Entwicklungsmodelle dieser Masse auf Pulsationsinstabilität habe ich auch den unteren Ast des Weges im HRD betrachtet, d. h. die mögliche Entwicklung zu den Roten Riesen. Speziell wurde dabei die F-Mode untersucht. In Tabelle 7 ist für sie Π und η über den ganzen RCB-Streifen gegeben (s. auch Abb. 20). Wichtig ist folgendes: Der untere Zweig besitzt einen wesentlich kühleren blauen Rand des Instabilitätsstreifens, er dürfte bei etwa 6500 K liegen. Bei 6445 K wurde nur eine Mode in dem Periodenbereich gefunden, in dem die F-Mode liegen sollte (s. Tab. 7). Beim heißesten Modell (12534 K) kommen drei in Frage, mit Perioden zwischen 1.65 und 3.7 Tagen. Alle sind gedämpft. Am ehesten scheint diejenige mit der kürzesten Periode der F-Mode zu entsprechen, weil dort die He^{++} -Ionisation noch anregend wirkt; die He^{+} -Zone liegt außerhalb der Photosphäre. Bei gleicher Effektivtemperatur sind die Perioden auf den unteren Ast meistens deutlich kürzer. Die Ausnahme bilden die kühleren Modelle unter 4000 K, doch ist hier der Einfluß der Konvektion wohl größer, und die Ergebnisse damit unsicherer.

Tabelle 7: Perioden und Stabilitätskoeffizienten für Moden F und II (soweit identifiziert) der Sequenz $M/M_{\odot} = 0.850$ (R1).

T_{eff}	$L/L_{\odot}$	F		II	
		Π	η	Π	η
12534	5181	1.65	-0.040		
6445	5830	32.70	-0.028		
5634	6172	55.08	0.14		
5136	6285	85.22	0.26		
4475	6797	182.66	0.44		
4361	6973	209.90	0.48		
4071	7754	338.10	0.61	53.33	0.050
3631	9135	842.66	0.97	94.07	0.020
3635	12303	595.66	0.83		
3822	12975	488.57	0.74		
4048	14129	368.14	0.64		
4705	15878	185.20	0.49	57.96	0.031
5011	17783	147.27	0.44	48.90	0.087
5236	20673	128.60	0.43	48.35	0.12
5483	21257	114.14	0.37	37.45	0.064
5878	21837	85.45	0.36		
6167	22141	70.49	0.35	25.40	0.19
7258	22243	40.01	0.33		
6100	22200	78.00	0.35	25.71	0.12
6300		70.48	0.33	22.10	0.10
6500		63.24	0.32	19.09	0.09
6700		57.25	0.30	16.45	0.08
6900		50.99	0.30	13.93	-0.05
7100		44.81	0.32	12.98	-0.04



Figur 20:

Wie Fig. 14a für $M = 0.850$ (R1). Die Schwingung F auf dem unteren Zweig der Entwicklung ist mit F gekennzeichnet (ebenso zwei Moden II), ein nicht adjustiertes Modell ist mit einem Pfeil, die Vergleichsmodelle mit konstanter Leuchtkraft mit senkrechten Zeichen auf der X-Achse bezeichnet.

Die Mode "II" wurde nicht so gründlich ge- und untersucht, doch liegen auch bei ihr die Perioden auf den unteren Ast tiefer als auf dem höheren. Dort ist sie auch bis etwa 6700 K instabil. Bei $M/M_{\odot} = .825$ gilt dies nur bis ca. 6000 K, und bei 0.8000 bis 5750 K. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß diese Schwingung immer schwerer zu identifizieren ist, je heißer der Stern wird. Da aber über den genannten Temperaturen überhaupt keine in Frage kommenden instabilen Moden gefunden wurden, kann die obige Behauptung wohl aufgestellt werden. Die Schalenquelle des Modells bei 5050 K ist nicht adjustiert, (der Stern ist etwas zu heiß), deswegen fallen die Perioden aus den monotonen Reihen.

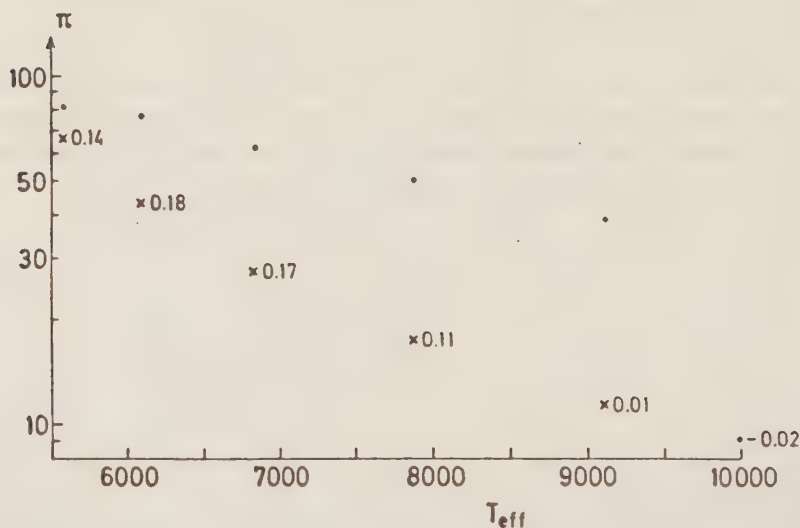
Wie aus Tabelle 7 hervorgeht, ändert sich die Leuchtkraft der Modelle zwischen 6167 K und 7258 K kaum. Deshalb wurden in diesem Temperaturbereich (6100 bis 7100 K) zusätzlich reine Außenschichten-Modelle konstruiert und untersucht, die alle $L/L_{\odot} = 22200$ besitzen. Das geschah, um erstens den für die wichtigsten RCBs interessanten Bereich genauer zu untersuchen, und zweitens, um die Ergebnisse besser mit den herkömmlichen Rechnungen vergleichen zu können. Z.B. wurde eine qualitativ gute Übereinstimmung mit Salo et al. (1984) gefunden, die den Fall $M/M_{\odot} = 1.0$, $L/L_{\odot} = 2 \cdot 10^4$ ab $\lg T_{\text{eff}} = 3.77$ untersuchten. Die Kreuzung zwischen S1 und F, die Anregung von F, die Perioden sind völlig konsistent mit ihren Ergebnissen. Interessant ist vor allem die Kreuzung von S1 und F.

Ohne hier weiter darauf einzugehen, sei nur erwähnt, daß die Kreuzung ohne einen sichtbaren Einfluß auf die Moden stattfindet. Man bedenke aber auch, daß der Eigenwert der Schwingungsgleichung nicht das reelle Π , sondern das komplexe σ ist, so daß also keine wirkliche Entartung vorliegt.

2.3.1.4. $M/M_{\odot} = 0.7875$ (R2)

In diesem relativ schwach nicht-adiabatischen Fall ($L/M \approx 12000$) wurde lediglich die F-Mode auf dem oberen Zweig gesucht, da der untere wegen der geringen Leuchtkräfte vom Standpunkt der Entwicklung aus gesehen weniger signifikant ist. In Fig. 21, dem $\lg \Pi - T_{\text{eff}}$ -Diagramm, sind daher nur die Schwingungen F und S1 gezeigt; bei F sind außerdem die Stabilitätskoeffizienten gegeben. Der blaue Rand des Instabilitätsstreifens liegt demnach bei etwa 9500 K; die Dämpfung ist wiederum auf die schwache Anregung durch die He^+ -Zone zurückzuführen. Das ist in Übereinstimmung mit dem Fall 0.800 (R1); masseärmere Modelle besitzen kleinere Instabilitätsgebiete. Offenbar nimmt die typische Leuchtkraft eines Entwicklungsmodells mit der Masse stärker als die von den Autoren gefundene kritische Leuchtkraft ab, bei der sich der Instabilitätsstreifen plötzlich zu höheren Temperaturen erweitert.

Außerdem ist zu erkennen, daß ein reduzierter Heliumgehalt (wir behandeln jetzt Modelle der Mischung mit mehr Kohlenstoff) die Periode der F-Schwingung etwas vergrößert. Sie stimmen nämlich mit denen des Modells 0.800 (R1) fast überein (etwas kürzer), wären also bei 0.7875 (R1) niedriger.

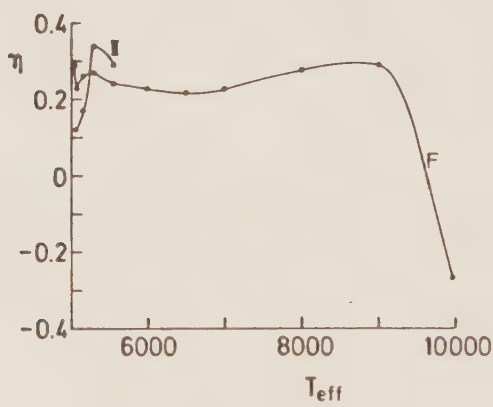
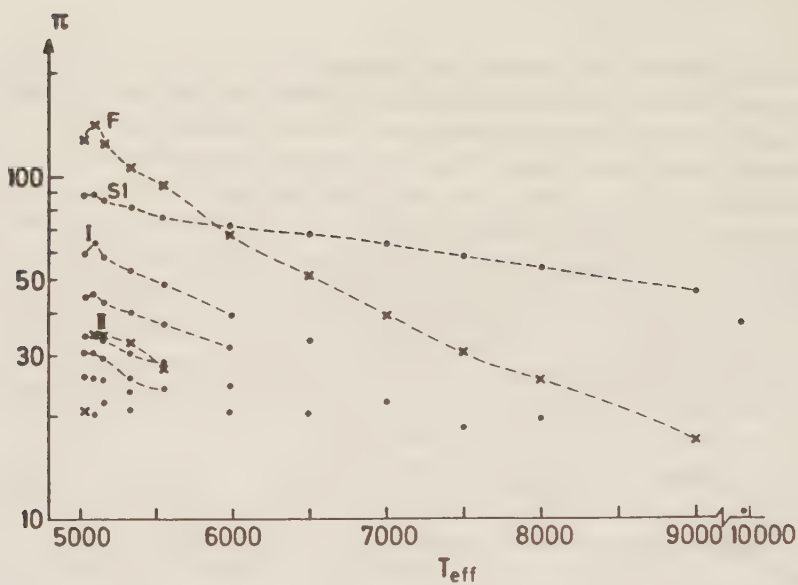


Figur 21:

Wie Fig. 14a für 0.7875 (R2); und F und S1 Mode; die Zahlen sind die Stabilitätskoeffizienten der F-Mode.

2.3.1.5. $M/M_{\odot} = 0.8125$ (R2)

Die letzte Aussage des vorigen Abschnitts wird mit diesem Modell bestätigt. Die Perioden der F-Schwingung stimmen mit denen aus dem Fall 0.825 (R1), also einem Modell höherer Masse, aber auch höheren Helium-Gehalts bis auf Bruchteile von Tagen überein. Bei I, II und S1 liegen sie tiefer. Da die untersuchten Effektivtemperaturen über 5000 K liegen, wurden instabile I-Schwingungen nicht gefunden. Zwischen I und II liegt noch eine unbekannte Mode, bei der es sich um die handeln könnte, die im Fall 0.850 (R1) die I-Schwingung bei etwa 6000 K schneidet, aber bei tieferen Effektivtemperaturen fehlt. II ist bis 5550 K instabil mit steigendem η , danach war sie nicht mehr zu identifizieren. Es wurde aber auch keine weitere angeregte Schwingung gefunden. Das bestätigt die Figuren 14 und 20. Diese Mode besitzt offenbar in allen Fällen ein sehr scharfes blaues Ende bei 5500 bis 6000 K. In Fig. 21 ist außerdem bei 5100 K wieder ein Modell mit nicht ganz adjustierter Schalenquelle zu erkennen, und bei 5050 K und $\Pi = 20.5$ d eine angeregte Schwingung hoher Ordnung. Die F-Mode ist instabil bis ca. 9900 K. Auch dieses Ergebnis paßt gut zu den blauen Enden der Instabilitäts-Streifen von 0.800 und 0.825 (R1). Das blaue Ende liegt zwar jetzt schon bei tieferen Effektivtemperaturen, doch hängt das mit den niedrigeren Leuchtkräften der R2-Modelle zusammen (s. 1.3 und 1.4).



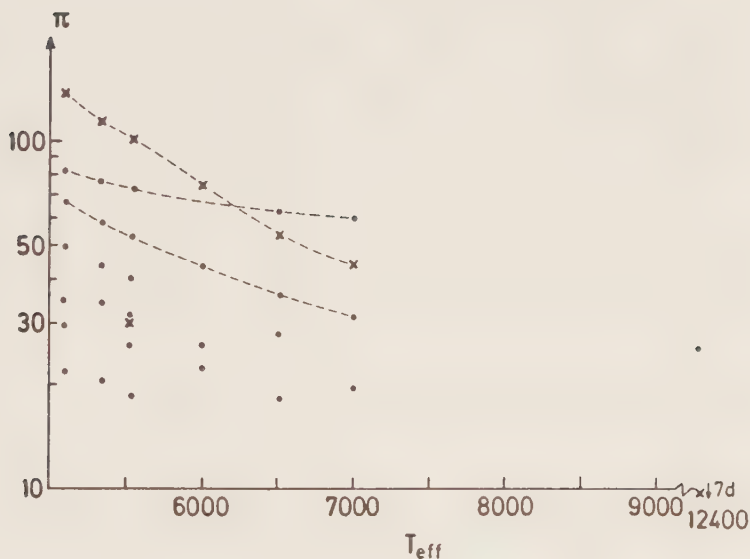
Figur 22:

a) wie Fig. 14a für 0.8125 (R_2)

b) Stabilitätskoeffizient für Mode F und II

2.3.1.6. $M/M_{\odot} = 0.8375$ (R2)

Dieses letzte Modell der Rote Riesen-Entwicklungsmodelle, das untersucht wurde, bietet nichts Neues mehr. Gegenüber dem letzten sind die Perioden länger, sie sind vergleichbar mit denen von 0.850 (R1). Eine angeregte II-Mode wurde offenbar nur einmal gefunden (5598 K, $\pi = 30d$). Das blaue Ende des Instabilitätsstrefens von F liegt bei über 12355 K, da dort noch ein instabiles Modell gefunden wurde.



2.3.2. Ein Stern der Standardentwicklung ($M/M_{\odot} = 0.8750$, R1)

Alle bisher untersuchten Modelle stammen aus der sogenannten "Rote Riesen-Entwicklung", mit der Sterne betrachtet werden, die sich von Vorgängern auf dem asymptotischen Riesenast entwickelt haben könnten. Deshalb wird hier noch der Stern 0.8750 (R1) aus den genau gerechneten Wegen von Abschnitt 1.3. auf seine Pulsationseigenschaften hin untersucht. Da der Massenbereich für die in Frage kommenden Modelle aus 1.3 sehr eng ist, genügt es, einen Stern stellvertretend zu untersuchen. Interessant ist vor allen Dingen, da der Unterschied zwischen der Leuchtkraft auf oberem und unterem Ast geringer ist als bei den Standardmodellen, wie sich das auf die Periodenunterschiede auswirkt.

In Tabelle 8 sind die wichtigsten Daten für die F-Mode zusammengefaßt. Sie ist auf beiden Ästen für Temperaturen unter ca. 10000 K instabil, die Perioden auf dem oberen Ast liegen bei $T_{\text{eff}} \approx 5000\text{--}8000$ um ca. 30% höher als auf dem unteren, bei 6300 K beträgt der Unterschied 16d. Sie stimmen mit den beobachteten bei den höheren Temperaturen besser überein (vgl. RY Sgr 38.7 d bei 7100 K), bei den niedrigeren sind sie etwas zu hoch. Beachtenswert ist, daß sie sich ab 6000 K mit den Perioden des Modells 0.825 (R1) aus Abschnitt 1.4 (vgl. Fig. 14a und Tab. 6) nahezu decken (oberer Ast). In dieser Phase ist die Leuchtkraft ja nur schwach veränderlich, und damit L/M ebenfalls. Dieses Verhältnis liegt beim hier besprochenen Modell bei 20400, bei 0.825 (R1) bei 21700, ist also sehr ähnlich. Möglicherweise besteht eine Verbindung zwischen L/M und Π .

Tabelle 8: Perioden, Stabilitätskoeffizient und Dämpfungszeit für Modelle einer Sequenz aus 1.3.1 ($M/M_{\odot} = 0.875$ (R1), F-Mode).

T_{eff}	$L/L_{\odot}$	Π	η	τ (a)	
25171	8847	0.531	-0.0459	0.005	
20207	9748	1.348	-0.0371	0.015	
15853	10469	3.621	-0.0419	0.038	
12715	10967	9.260	-0.0617	0.065	
10102	11376	8.999	-0.0457	0.086	
7929	11695	17.873	0.0080	-0.097	
6310	12039	40.409	0.1549	-0.114	
5015	13056	131.764	0.3677	-0.156	
4775	14454	170.359	0.4502	-0.165	
5013	16285	171.346	0.3259	-0.229	
6001	17713	67.867	0.2799	-0.106	L/M=20243
6311	17861	56.245	0.2636	-0.093	
7034	18092	37.456	0.2681	-0.061	L/M=20570
8050	18235	22.676	0.2428	-0.041	
9757	18348	10.650	0.1431	-0.031	

2.3.3. Modelle der Entwicklung mit Massenverlust

Von allen gerechneten Entwicklungssequenzen unter Berücksichtigung von Massenverlust wurden einige Modelle der oberen Zweige ausgewählt und speziell auf die F-Mode untersucht. Da der Wert L/M bei diesen Modellen wesentlich niedriger liegt – typischerweise bei 10000 –, kann man davon ausgehen, daß diese leicht zu identifizieren ist. Nach den Erkenntnissen aus 2.3.1. über das heiße Ende des Instabilitätsstreifens können wir außerdem erwarten, daß es nun bei Temperaturen unter 10000 K liegt. In Tabelle 9 sind die Resultate gezeigt. Für die größeren Massen liegt das blaue Ende teilweise unter der Effektivtemperatur von R CrB oder RY Sgr. Die niedrigeren Massen erreichen immerhin noch etwa 8000 K. Für den unteren Zweig (Entwicklung zum Bereich der Roten Riesen) wären die Grenztemperaturen natürlich wegen der höheren Massen, aber niedrigeren Leuchtkräfte noch kleiner. Die Perioden liegen ebenfalls tiefer als bei den Standardmodellen. Beispielsweise hat $M/M_{\odot} = .8430$, $T_{\text{eff}} = 4938$ K eine Periode von 112.78 d, dagegen $M/M_{\odot} = .850$ (feste Masse), $T_{\text{eff}} = 5011$ K bei gleicher chemischer Zusammensetzung 147.27 d. Der Unterschied ist mit der höheren Masse allein nicht zu erklären. Alles in allem entsprechen diese Modelle etwa denen der unteren Zweige der Standardentwicklung: kürzere Perioden, weniger ins Blaue ausgedehnte Instabilitätsstreifen.

Tabelle 9: Wie Tabelle 8 für Modelle der Entwicklungsrechnungen mit Massenverlust (1.3.3.) Anfangsmasse und Mischung sind jeweils angegeben.

$M/M_{\odot}$	T_{eff}	$L/L_{\odot}$	Π	η	τ
0.8875 (R1)					
0.843	4998	8865	112.78	0.34	-0.144
0.832	6021	9779	45.52	0.067	-0.295
0.824	8056	10617	16.37	-0.0033	2.100
0.819	10280	11495	8.87	-0.034	0.112
1.000 (R1)					
0.847	5025	12394	128.82	0.35	-0.157
0.840	7502	13113	23.22	0.13	-0.076
0.839	10086	13515	10.30	-0.01	0.43
0.950 (R2)					
0.866	4011	9721	251.87	0.49	-0.225
0.851	5007	10750	106.15	0.25	-0.184
0.846	6090	11225	43.83	0.17	-0.110
0.839	7055	12123	26.97	0.17	-0.109
0.838	9574	12272	10.64	-0.008	0.536
1.100 (R2)					
0.886	4996	10134	104.20	0.24	-0.188
0.875	6483	10644	32.45	0.12	-0.114
0.868	7076	11125	24.19	0.12	-0.087
1.200 (R2)					
0.979	5015	8140	90.20	0.21	-0.179
0.961	5992	8192	46.08	-0.056	0.358
0.943	6961	8537	19.18	-0.049	0.170
0.920	8061	8978	13.36	-0.058	0.100
0.908	9016	9045	10.10	-0.060	0.073

2.3.4. Zusammenfassung der Ergebnisse der Pulsationsrechnungen

Es wurden Modelle aus den Entwicklungsrechnungen von Kapitel 1 auf Stabilität gegen radiale Pulsationen und auf ihre Perioden hin untersucht. Der Massenbereich umfaßte dabei $0.7875 \leq M/M_{\odot} \leq 0.875$ (höhere Werte bei den Rechnungen von 2.3.3.). Die Ergebnisse werden in Stichpunkten wiederholt:

- 1) Für die F-Mode (entspricht bei sehr tiefen Temperaturen der Grundschwingung im adiabatischen Fall) besteht ein Instabilitätsstreifen, dessen kühles Ende nicht gefunden wurde (zu hohe Effektivtemperaturen, Vernachlässigung der Konvektion bei der Linearisierung), und dessen heißes Ende mit der Masse von etwa 9000 K bis über 17000 K ansteigt (dies bezieht sich auf den oberen Zweig der Entwicklungswege). Es hängt außerdem stark von der Leuchtkraft ab. Sinkende Leuchtkraft bewirkt ein Verschieben zu kühleren Effektivtemperaturen. Die Perioden liegen bei 7000 K zwischen 30 und 50 Tagen. Sie nehmen mit steigender Temperatur ab, was auch aus der Periode-Dichte-Beziehung zu erwarten ist, aber für andere Moden (S2) nicht gilt! Die Anwuchszeit ist typischerweise 0.1 a. Der Anregungsmechanismus ist klar der κ -Mechanismus in den beiden Helium-Ionisationszonen. Dabei ist die He^+ -Zone wichtiger. Sind die Modelle so heiß, daß sie aus dem Stern wandert, werden sie stabilisiert. Die He^{++} -Zone wirkt teilweise (S-Moden) auch stabilisierend.
- 2) Modelle auf den unteren Zweigen haben bei der F-Mode deutlich kürzere Perioden und engere Instabilitätsstreifen (Grenztemperatur unter 7000 K!).
- 3) Modelle, die mit Massenverlust gerechnet wurden, zeigen ähnliches wie die in 2), aber in stärkerem Maße.
- 4) Bei gleicher chemischer Zusammensetzung werden die Perioden mit zunehmender Masse für gleiche Effektivtemperatur größer. Die Zunahme hängt von der Effektivtemperatur ab, beträgt aber etwa 10% bei $\Delta M/M_{\odot} = 0.025$.
- 5) Bei gleicher Masse und Temperatur, aber unterschiedlicher Zusammensetzung ist die Periode bei niedrigerem Kohlenstoffgehalt (= höherer Heliumgehalt) kleiner. Dieser Effekt ist zwischen den beiden verwendeten Mischungen ungefähr halb so groß wie bei einer Massendifferenz von $\Delta M/M_{\odot} = 0.025$, so daß die Unsicherheit im C-Gehalt einer Unsicherheit von $\Delta M/M_{\odot} = 0.01$ bei bekannter Periode entspricht. Dies gilt nur bei der F-Mode. Bei den höheren sind die Beziehungen nicht so eindeutig. Ansonsten ist der Kohlenstoff ohne ersichtlichen Einfluß auf die Schwingungen.

- 6) Die Mode I wurde bei Modellen des oberen Zweiges bei sehr tiefen (unter 4300 K) und bei hohen Temperaturen (etwa ab 7200 K) als angeregt gefunden. Im ersten Fall ist sie nur schwach angeregt, so daß Konvektion zur Dämpfung ausreichen könnte. Im zweiten zeigt sie Tendenz, zunehmend instabiler zu werden, während die F-Mode ja stabilisiert wird.
- 7) Die Mode II konnte von den tiefsten Temperaturen bis etwa 6000 K gut verfolgt werden. Dabei ist sie bei steigendem Stabilitätskoeffizienten η angeregt. Bei höheren Temperaturen konnte sie nicht mehr erkannt werden. Es gibt allerdings Hinweise, daß sie bei ca. 6000-6500 K plötzlich gedämpft wird.
- 8) Die Perioden der I- und II-Mode nehmen ebenfalls mit steigender Temperatur ab und sind stets deutlich kleiner als die der F-Mode.
- 9) Alle anderen Moden, insbesondere die S1 und S2 Moden sind stabil. Die S2 Mode ist extrem gedämpft (Dämpfungszeit von wenigen Tagen).
- 10) Einige unerklärte Moden, auch instabile, bleiben bestehen. Numerische Unsicherheiten müssen dabei berücksichtigt werden.

3. Anwendung

3.1. Entwicklungszustand

Wie schon von Paczynski (1971) und Biermann und Kippenhahn (1971) gezeigt, ist es möglich, Modelle für RCBs zu gewinnen, die aus einem entarteten Kohlenstoff-Sauerstoff-Kern und einer Heliumhülle (mit Kohlenstoffanreicherung) bestehen. Dies gelingt sowohl für Entwicklungsrechnungen, die von homogenen Sternen ausgehen, wie auch für mehr oder weniger künstlich in das Gebiet der Roten Überriesen gesetzte Modelle. Wir erhielten aufgrund der neuen, höheren Opazitäten jedoch auch Modelle bei sehr tiefen Temperaturen (3000–4000 K), so daß der ganze beobachtete Effektivtemperaturbereich der RCBs mit Modellen in diesem Entwicklungszustand abgedeckt werden konnte. Bei Annahme von höheren Leuchtkräften ($\lg L/L_{\odot} > 4.3$) und damit höheren Massen (vgl. Fig. 7a, 7b und 12; $M/M_{\odot} \geq 0.900$) können sogar noch tiefere Temperaturen erreicht werden. Die Modelle der Verallgemeinerten Hauptreihen besitzen bei $\lg T_{\text{eff}} = 3.47$ bereits sehr tiefe äußere Konvektionszonen, die bis fast zur Schalenquelle reichen können. Die Hayashi-Grenze für vollkonvektive Modelle dürfte also nur wenig weiter rechts im HRD zu finden sein. Tatsächlich werden auch die tiefsten Temperaturen von RCBs oder den verwandten Hydrogen deficient Carbon stars (HdCs) mit 2500 ± 500 K angegeben. Ob es auch möglich ist, Modelle in das RCB-Gebiet zu entwickeln, in deren Kern Kohlenstoff brennt (Kernmasse muß dann $\geq 0.8 M_{\odot}$ sein), bleibt dahingestellt.

Wenn die Effektivtemperaturen, wie in Tabelle 4, tatsächlich höher als 4000 K sind, sind die Hüllen der RCB's weitgehend radiativ, und nicht, wie früher angenommen, fast vollkonvektiv. Bei 7000 K umfaßt die äußere und dickere Konvektionszone weniger als $2 \cdot 10^{-4}$ der Gesamtmasse ($M = 0.800 M_{\odot}$).

Die Entwicklung auf dem oberen Ast findet bei fast konstanter Leuchtkraft statt (wie auch bei Schönberner 1977). Sie erinnert daher an die Entwicklungswege von Zentralsternen Planetischer Nebel (Faulkner und Wood 1984 und Schönberner 1981).

3.2. Massen

Das wichtigste Ziel dieser Arbeit war, Aussagen über die Massen von R CrBs zu machen. Bisher waren auf der einen Seite (Schönberner 1977) $0.7 M_{\odot}$ aus Entwicklungsrechnungen und bis zu 3.0 mit Schwerpunkt bei $1.4 M_{\odot}$ aus Pulsationsrechnungen (z.B. Salo und Wheeler 198) genannt. Aus unseren Entwicklungsrechnungen, sowohl aus 1.3, als auch aus 1.4 und 1.5 läßt sich der *maximale* Massenbereich auf $0.6 \leq M/M_{\odot} \leq 2 M_{\odot}$ einschränken. Sterne mit anderen Massen kann man nicht im RCB-Gebiet erhalten. Die untere Grenze ergibt sich aus 1.5. Aus den Modellen der Verallgemeinerten Haupttreihen mit Stufenprofil erhält man nämlich die maximale Leuchtkraft bei vorgegebener Kernmasse. Wir haben aber gesehen, daß Modelle, mit solch niedriger Masse, deren chemisches Profil absolut künstlich ist, sich in deutlich weniger als einer nuklearen Zeit von $\sim 10^4$ a zu den realistischen Entwicklungsmodellen bewegen, die heißer als die beobachteten RCBs sind. Daher setzen wir die untere Grenze auf $0.8 M_{\odot}$ fest. Solche Modelle können nämlich mit realistischen Schalenquellenprofilen ins RCB-Gebiet entwickelt werden und bleiben auch im kühlen Teil des RCB-Streifens, wenn sie dorthin mehr oder weniger künstlich (1.4 und 1.5) gesetzt werden.

Die obere Grenze der überhaupt in Frage kommenden Massen ergibt sich zunächst aus Habets (1985), da Entwicklungswege der Sterne mit $M/M_{\odot} \geq 2$ den RCB-Streifen überhaupt nicht berühren. Die weitere Einschränkung auf $M/M_{\odot} \leq 0.9$ ergibt sich aus der Tatsache, daß massereichere Modelle den RCB-Streifen nur mit dem unterem Ast durchqueren, und nur dabei die Temperaturen zwischen 10000 und 4000 K erreichen.

Damit sind wir bei der Frage, ob wir generell den unteren Ast bei der Entwicklung von RCBs ausschließen können. Dafür gibt es die folgenden Argumente:

Die Aufenthaltsdauer auf dem unteren Ast, gerechnet vom Eintritt in den RCB-Streifen bis zum kühlgsten Modell, ist ebenso groß oder länger als die Entwicklungszeit vom kühlgsten Modell bis zum Austritt (vgl. Tab. 1 und 2; Dauer jeweils etwa $.5-1.0 \cdot 10^5$ a). Da die Entwicklung bei den kühlgsten Modellen am langsamsten vor sich geht, ist es auch sinnvoll, sich auf einen höheren Temperaturbereich zu beschränken. So braucht ein $0.875 M_{\odot}$ -Modell von $\lg T_{\text{eff}} = 4.2$ bis 3.78 (6000 K) ca. $2 \cdot 10^4$ a, aber von $\lg T_{\text{eff}} = 3.78$ bis 4.2 nur $4 \cdot 10^3$ a. Für die etwas heißeren RCBs (z.B. R CrB und RY Sgr)

Ist damit die Aufenthaltsdauer auf dem unteren Ast um einen Faktor 5 größer als auf dem oberen. Der Grund ist, daß die nukleare Zeitskala sowohl wegen der höheren Leuchtkraft ($\sim$ Faktor 2) als auch wegen der dünneren Schalenquelle ($\sim$ Faktor 3) kürzer geworden ist. Damit ist es also mindestens ebenso wahrscheinlich, einen RCB auf den unteren, wie auf den oberen horizontalen Teil seiner Entwicklung zu finden.

Tatsächlich aber ist keine Trennung von RCB in leuchtkräftigere und -schwächere (bei gleicher Farbe) beobachtet oder erwähnt. Natürlich läßt sich gegen dieses Argument einwenden, daß die Beobachtungsunsicherheiten bei der Bestimmung der Leuchtkräfte so groß sind, daß sie den RCB-Streifen überdecken, und damit zwei Klassen von RCBs überhaupt nicht zu unterscheiden wären. Hier aber helfen die Pulsationsrechnungen weiter. Aus deren Ergebnissen wird nämlich klar (Tabellen 7 und 8), daß Sterne auf beiden Ästen instabil gegen Pulsationen sind (wenn allerdings die Leuchtkraft der jüngeren Modelle sehr niedrig ist - damit aber wieder eher zu unterscheiden von den weiterentwickelten! -, liegt das blaue Ende des Instabilitätsstreifens bei $T_{\text{eff}} \leq 7000$ K), die Perioden sich aber deutlich unterscheiden. Bei 6000 K beträgt der Unterschied immerhin etwa 30 d (Tab. 7) bzw. bei 6300-7000 K 15 d (Tab. 8), das sind rund 35%. Solche Unterschiede müßten zu beobachten sein. In Tabelle 4 sind zwar solche Differenzen zu erkennen (V CrA, GU Sgr, RT Nor), doch handelt es sich dabei immer um Amateurbeobachtungen, die bei einer Pulsationsamplitude von max. 0^m.3 und einer visuellen Helligkeit von typischerweise $m_v = 11^m$ verständlicherweise sehr unsicher sind. Dazu ist bei RT Nor die Periode auch nicht kürzer als die, welche man für den oberen Ast vorhersagen würde, sondern länger!

Das dritte Argument gegen RCBs auf dem unteren Ast ergibt sich aus der Tatsache, daß alle Moden, die möglicherweise angeregt sind, sich insofern normal verhalten, daß ihre Perioden mit steigender Effektivtemperatur abnehmen. Damit ist das Vorzeichen einer Periodenänderung klar: $dP/dt = dP/dT_{\text{eff}} \cdot dT_{\text{eff}}/dt > 0$ für den unteren Ast, < 0 für den oberen. Die bisher aus Beobachtungen bestimmten Periodenänderungen sind $k' = (-51 \pm 2) \cdot 10^{-5}$ d/Zyklus* für RY Sgr (Kilkenny 1982) und $k' = -0.194 \pm 0.003$ für S Aps.

* k' ist wie folgt definiert: Das Julianische Datum für ein Pulsationsminimum errechnet sich aus $JD_{\text{min}} = T_0 + nP_0 + n^2 k'$, wo P_0 die Periode, n die Nummer des Zyklus und T_0 das Minimum des 0-ten Zyklus ist (Kilkenny und Lynas-Gray 1982). $k' = k/2 = (dP/dt)/2$.

sowie $0.003 > k' > -0.006$ für UW Cen (Kilkenny und Flanagan (1983). In Tabelle 10 sind theoretische k -Werte aus unseren Rechnungen für verschiedene Fälle aufgelistet.

Tabelle 10: Theoretische Periodenänderungen: dP/dT_{eff} wurde aus den Abbildungen bestimmt; dT_{eff}/dT aus den Entwicklungsrechnungen.

Modell	T_{eff}	$L/L_{\odot}$	$\frac{dT_{\text{eff}}}{dT} \left(\frac{K}{\text{g}} \right)$	$\pi \text{ (d)}$	$\frac{d\pi}{dT_{\text{eff}}} \left(\frac{\text{d}}{K} \right)$	$\frac{d\pi}{dT_{\text{eff}}} \left(\frac{\text{d}}{\text{g}} \right)$	$k \left(\frac{\text{d}}{\text{Zyklus}} \right)$
0.825 (R1)	4072	9886	0.002	337	-0.38	-0.0007	$-7 \cdot 10^{-4}$
0.825 (R1)	5998	17861	0.11	68	-0.05	-0.0055	$-1 \cdot 10^{-3}$
0.800 (R1)	7075	11798	0.45	29	-0.02	-0.0089	$-7 \cdot 10^{-4}$
0.850 (R1)	4475	6797	-0.006	183	-0.30	+0.0019	$+9 \cdot 10^{-4}$
0.850 (R1)	4412	15136	0.03	246	-0.20	-0.0060	$-4 \cdot 10^{-3}$
0.875 (R1)	7034	18092	0.65	37	-0.03	-0.0195	$-2 \cdot 10^{-3}$

Die Größenordnung ist auf beiden Ästen ähnlich, da auf den unteren zwar dT_{eff}/dT kleiner ist, dafür aber $d\pi/dT_{\text{eff}}$ größer ist als auf den oberen. Die Werte liegen um $1 \cdot 10^{-3}$. Für $M/M_{\odot} = 0.800$ und $T_{\text{eff}} = 7075$ K erhalten wir $k = -7 \cdot 10^{-4}$ in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Kilkenny (1982). $k' = -5 \cdot 10^{-4}$ für RY Sgr. Den hohen Wert für S Aps können auch wir nicht erreichen. Kilkenny und Flanagan argumentieren, daß dieser Stern möglicherweise nie Helium zünden könnte, wenn seine Masse zu gering ist, bzw. der Stern sich gerade in einem von Schönberner (1979) gefundenen Helium-Flash bei gleichzeitigem starken Massenverlust befindet. Kilkenny (1982) hat auch k -Werte aus den Rechnungen von Schönberner (1975) erhalten, indem er eine Periode-Dichte-Beziehung wie für adiabatische Schwingungen annahm. Da die tatsächliche Beziehung zwischen Periode und Effektivtemperatur steller ist, liegen seine Werte für $1 M_{\odot}$ unter den unseren. Das $0.7 M_{\odot}$ Modell von Schönberner entwickelt sich (vgl. 1.6) wegen der weit außen liegenden Schalenquelle auf weniger als einer nuklearen Zeitskala durch das

RCB-Gebiet, so daß deswegen die k -Werte Kilkenny's wieder vergleichbar sind.

Zusammenfassend läßt sich sagen: es keinen starken Hinweis darauf, daß sich die Periode der RCBs vergrößern könnte. Die Übereinstimmung der Periodenänderungen bei RY Sgr zwischen der Analyse der Beobachtungen und den theoretischen Werten spricht für die Richtigkeit der Entwicklungsmodelle. Deshalb können wir, wenn wir nicht begründen wollen, warum RCBs auf den unteren Ast nicht schwingen, obwohl sie offensichtlich angeregt wären, Modelle in diesem Entwicklungsstadium als Kandidaten für RCBs ausschließen. Sterne höherer Masse, deren Entwicklung den RCB-Streifen nur auf dem Weg zu den Roten Riesen schneidet, können ebenfalls ausgeschlossen werden, da erstens das blaue Ende des Instabilitätsstreifens Temperaturen unter 7000 K erreichen kann, zweitens die Periodenänderung das falsche Vorzeichen hat, drittens die Leuchtkraft mit den späten Spektraltypen steigen müßte (vgl. Dürbeck und Seitter 1982), und viertens die Frage bleibt, was mit den Sternen geschieht, wenn sie die tiefsten Temperaturen erreicht haben, da bisher noch keine kühlen Helium-Sterne oder verwandte Typen bei noch höherer Leuchtkraft beobachtet sind. Der obere Ast fehlte dann ebenfalls gänzlich.

Der Einfluß eines unterschiedlichen Kohlenstoffgehalts spielt bei alledem keine Rolle, wie sich aus 2.3. ergab.

Anschließend können wir also den Massenbereich für RCBs aufgrund der Entwicklungsrechnungen auf $0.8 \leq M/M_{\odot} \leq 0.9$ eingrenzen. Dieser Bereich wird durch die Pulsationsrechnungen (s. nächster Abschnitt) bestätigt. Mit steigender Masse sinkt die tiefste erreichbare Effektivtemperatur, und steigt die Leuchtkraft auf dem horizontalen Teil des Entwicklungsweges (vgl. die Diskussion in 1.4). Eine Erhöhung des Kohlenstoffgehalts der Hülle führt wegen der höheren Opazitäten ebenfalls zu tieferen Temperaturen, aber auch zu niedrigeren Leuchtkräften (wegen der Reduzierung des 3α -Prozesses).

3.3. Pulsationen

Es wurde gezeigt, daß alle in dem RCB-Streifen entwickelten Modelle instabile Moden besitzen. Speziell die als "F" bezeichnete Schwingung ist außer bei den höchsten Temperaturen immer angeregt. Der Anregungsmechanismus in allen instabilen Moden ist klar der κ -Mechanismus in den Heliumionisationszonen. Dabei ist die erste Ionisationszone wichtiger als die zweite, da ein Wandern dieser Zone aus dem Stern bereits zur Stabilisierung (blaues Ende des Instabilitätsstreifens) führt. Für die F-Mode wurde kein rotes Ende gefunden, da die Effektivtemperaturen der untersuchten Modelle nicht so niedrig werden, daß die Konvektionszone bereits einen merklichen Effekt ausüben könnte. Die Anwachszeiten liegen typischerweise bei 0.1a, und sind deutlich niedriger als die der I-Mode, welche bei sehr tiefen, aber auch bei hohen Temperaturen ebenfalls angeregt ist. Eine weitere Mode, II, ist bis etwa 6000 K angeregt, dann stark gedämpft. Ihre Anwachszeit ist vergleichbar mit der der F-Mode. Lediglich diese beiden Moden kommen für RCBs in Betracht. Generell liegen aber die Perioden für II zu tief. Die Perioden der F-Mode liegen bei Effektivtemperaturen von 6000 K und höher sehr nahe bei den beobachteten. So läßt sich R CrB durch ein Modell der Masse $0.850 M_{\odot}$ und Mischung R1 darstellen ($\Pi \approx 48$ d bei $T_{\text{eff}} = 7000$ K), oder auch durch $0.8375 M_{\odot}$ der Mischung R2 ($\Pi \approx 45$ d). RY Sgr mit einer deutlich niedrigeren Periode von 38.7 d entspräche z.B. $M/M_{\odot} = 0.825$ (R1) mit richtiger Periodenänderung oder $0.8125 M_{\odot}$ (R2). Nehmen wir ein reines Entwicklungsmodell aus 1.3, so muß M höher sei (Tab. 8, $M = 0.875 M_{\odot}$). Bei diesen Modellen spielt Konvektion keine Rolle.

Bei tieferen Temperaturen liegen die theoretischen Perioden systematisch niedriger als die (allerdings schlecht) beobachtbaren Werte. GU Sgr mit einer sehr niedrigen Periode von 38d könnte in Mode II pulsieren (z.B. $M/M_{\odot} = 0.825$ (R1)). Auch die anderen Sterne mit Effektivtemperaturen von 5000 K liegen eher bei Mode II als bei F (vgl. Fig. 12, $M = 0.850 M_{\odot}$). Nur, wenn entweder eine große Unsicherheit in den Temperaturbestimmungen (um mindestens 500 K zu tief), oder Massenverlust (Fall 1, vgl. Tab. 9) angenommen wird, liegt die Periode der F-Mode wieder im beobachteten Bereich. Allerdings muß wiederholt werden, daß für RCBs mit $T_{\text{eff}} = 5000$ K nur Amateurbearbeitungen vorliegen! Die Periode von UW Cam (43d, 6000 K) läßt sich mit Modellen niedrigerer Masse (ca. $0.800 M_{\odot}$) wieder gut modellieren. S Aps mit einer Effektivtemperatur von 4000 K und einer Periode von etwa

140d schafft die größten Probleme, es sei denn, daß die Temperaturen wieder kräftig unterschätzt wurden (um etwa 500-1000 K).

Während also die heißeren RCBs ab etwa 6000 K leicht in unseren Perioden-Effektivtemperaturen wiedergefunden werden können, trifft dies nicht für die kühleren, aber auch von der Beobachtung her schlechter bestimmten RCBs zu. Der Massenbereich aus 3.2 wird im wesentlichen bestätigt. Ein niedrigerer Kohlenstoffgehalt verkürzt die Periode ebenso wie niedrigere Gesamtmasse. Da die Unterschiede gering sind, kann aus den Pulsationen nicht auf den Kohlenstoffgehalt geschlossen werden. Dazu müßten beispielsweise die Leuchtkräfte und Effektivtemperaturen sehr genau bestimmt werden. Möglicherweise (Fig. 14b und 21) wirkt Zugabe von Kohlenstoff über die gleichzeitige Reduzierung von Helium etwas stabilisierend.

Eine Überlagerung von Moden, wie von Goncharova et al. (1983) für R CrB gefunden, scheint zwar prinzipiell möglich, die von den Autoren genannten Perioden können aber nicht wiedergegeben werden.

Für die F-Mode erhalten wir eine Phasenverschiebung von l gegen x (Leuchtkraftmaximum gegen Radiusmaximum) von 30° - 40° für die höheren Temperaturen ab 6000 K und 0° - 10° für die niedrigeren. Aus den Kurven für die beobachtete visuelle Helligkeit und die Radialgeschwindigkeit liest man eine Phasenverschiebung von etwa -20° - 0° ab (unsicher wegen der Unregelmäßigkeit der Kurven), so daß auch hier relativ gute Übereinstimmung herrscht. Man bedenke vor allem, daß die Phasenverschiebung immer ein kritischer Punkt in linearen - und nichtlinearen - Rechnungen ist.

Besonders interessant ist die Frage, ob XX Cam pulsiert oder nicht. Dieser Stern ist R CrB und RY Sgr so ähnlich, daß er nach meinen Ergebnissen einfach pulsieren muß. Ist das nicht der Fall, so müssen bisher unbekannte Unterschiede (Massenverlust, niedrigere Leuchtkraft?) zu den beiden anderen Sternen bestehen.

3.4. Extreme Helium-Sterne

Diese Sterne, die mit den RCBs nahe verwandt sind, zeichnen sich durch eine ähnliche chemische Zusammensetzung (Wasserstoff um einen Faktor $> 10^3$ reduziert, Kohlenstoff angereichert) aus. Sie zeigen keine Verdunkelungen, möglicherweise aber kleine regelmäßige Variationen ähnlich wie die pulsierenden RCBs (Hunger 1975, und darin genannte Arbeiten). Die beiden Objekte V348 Sgr und MV Sgr werden teils als extreme Helium-Sterne, teils als RCBs oder als Übergangsstadium geführt. Ihre Effektivtemperatur ist 15000–16000 K (Walker 1985, Drilling et al. 1984), ob MV Sgr auch pulsiert, ist strittig. Andererseits erreichen einige extreme Helium-Sterne niedrigere Temperaturen (z.B. BD - 1^o3438, $T_{\text{eff}} = 11000$ nach Drilling et al. 1984), ohne zu pulsieren. Die Erklärung ergäbe sich nach Kapitel 2 durch Massen- oder Leuchtkraftunterschiede. Da das blaue Ende des Instabilitätsstreifens stark von L bei fester Masse abhängt (vgl. Salo et al. 1984), könnten die kühleren Heliumsterne bei gleicher Masse eine etwas niedrigere Leuchtkraft besitzen, wodurch sie aus dem Instabilitätsgebiet fallen. Das würde bedeuten, daß die RCBs in einem späteren Stadium (bei weiter nach außen gebrannter Schalenquelle) ihren Wasserstoff verloren haben. Umgekehrt würde auch eine höhere Masse der extremen Helium-Sterne fehlende Pulsationen erklären. MV Sgr ist so heiß, daß, wenn er pulsiert, sein L/M -Verhältnis außergewöhnlich hoch sein muß.

3.5. *Hydrogen deficient Carbon-Stars (HdCs)*

Auch diese Sterne sind mit den RCBs verwandt, zeigen aber keine Verdunkelungen und Pulsationen. Ihre Effektivtemperaturen liegen wie die der kühlgsten RCBs oder niedriger. Sie könnten daher entweder Vorläufer der RCB sein, oder höhere Massen besitzen, wobei die Frage ist, wohin sie sich dann entwickeln. Nach meinen Pulsationsrechnungen sollten auch sie mit Perioden von typischerweise 300-400 d pulsieren. Wenn die Amplitude so niedrig ist wie bei RCBs, ist eine Entdeckung natürlich sehr schwierig. Andererseits könnten sie auch jenseits des roten Endes des Instabilitätsstreifens liegen. Um das festzustellen, müßten aber, wie auch bei den Cepheiden, Konvektion in den Pulsationsrechnungen eingeschlossen werden.

3.6. Ursprung

Zur Zeit stellt das Doppelsternszenario von Iben und Tutukov (1985) eine beliebte Erklärung für die Entstehung von RCBs dar. Aus einem Doppelsternsystem mit ursprünglichen Massen von 8 und 3 $M_{\odot}$ und einer Bahnperiode von 1-4 Jahren entwickelt sich durch zwei Stadien gemeinsamer Hüllen und Massenaustausches ein System aus einem He-Weißen Zwerg und einem CO-Weißen Zwerg mit einer Umlaufperiode von 2-10 Stunden. Durch Energieverlust durch Gravitationswellenabstrahlung verschmelzen diese beiden Zwerge schließlich zu einem RCB-Stern (ein mögliches Endprodukt, Supernova Typ I auch möglich). Aus demselben Szenario erhalten die Autoren auch HdCs und extreme Helium-Sterne. Bei einer Entstehungshäufigkeit von 10^{-2} pro Jahr und einer Lebensdauer von etwa $2 \cdot 10^5$ Jahren schätzen sie die Zahlen solcher Sterne auf ca. 2000 für die Galaxis ab, was mit den Beobachtungen übereinstimmt. Für die RCBs mit einer Lebensdauer von etwa 10^4 Jahren, erhält man ca. 100 Objekte. Auch das stimmt mit Schätzungen aus Beobachtungen überein. Abgesehen davon, daß weder die verschiedenen Stadien gemeinsamer Hüllen oder gar das Verschmelzen untersucht sind, ergibt sich folgendes: Die beiden Zwerge sollen so verschmelzen, daß der CO-Zwerg den Kern bildet, der He-Zwerg die Hülle und durch Schwerkkräfte genau die Menge an Kohlenstoff und Sauerstoff von ersteren in die "Hülle" gemischt wird, die beobachtet wird. Ein Massenverlust aus dem System ist in dieser Phase nicht vorhergesagt. Die Masse des entstandenen Objekts könnte nach Iben und Tutukov 1.1 bis 1.7 $M_{\odot}$ betragen. Wir wissen aber schon aus 3.2., daß solche Massen zu hoch sind.

Reduziert man daher die Massen beider Zwerge in der gleichen Weise, um auf etwa 0.9 $M_{\odot}$ zu kommen, sagen wir $M_{CO} = 0.7$, $M_{He} = 0.2$ (das sind schon extreme Werte!), so heißt das, daß die neu gebildete Schalenquelle bei $q = 0.77$ sitzt. Das heißt aber (nach 1.3 z.B.), daß der Stern noch bei $\lg L/L_{\odot} = 3.90$ und $\lg T_{eff} = 4.55$ sitzt, also näher bei der RCB-Hauptreihe als bei den Roten Riesen (Dabei schließe ich aus der Position der Vorgänger in HRD auf die Position des neuen Sterns. Theoretisch existiert ja auch ein Modell mit gleichem q_0 im Roten. Doch da die Schalenquelle neu aufgebaut wird und zündet, entspricht dies eher einem Hauptreihenstern als einem entwickelten). Folglich muß der Stern auch den unteren Ast durchlaufen, der aber ebenfalls nach 3.1. ausgeschlossen werden kann. Nur unter sehr konstruierten Umständen (Massenverlust fast des ganzen Helium-Zwerges; damit $q \geq 0.9$, oder Masse so, daß auf unterem Zweig außerhalb Instabilitätsgebiet,

aber auf oberem innerhalb) läßt sich diese Idee retten.

Ein weiteres Gegenargument ist statistischer Natur: Die Aufenthaltsdauer auf der "RCB-Hauptreihe" oder auch in den daran anschließenden Stadien ist mindestens 10 mal so lang wie die im RCB-Streifen. Da der Massenbereich der sich dann in den RCB-Streifen entwickelnden Sterne sehr eng ist (etwa 0.85-0.90 nach 1.3 unter Berücksichtigung einer höheren $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Rate), heißt das, daß ca. 1000-10000 Helium-Sterne im selben Massenbereich auf oder nahe der Hauptreihe sitzen müßten. Weder wird dies beobachtet, noch gibt es Gründe, den Massenbereich dieser Nach-Hauptreihen-Heliumsterne so eng zu halten, wodurch das Dilemma weiter vergrößert wird.

Und selbst wenn es möglich wäre, den verschmolzenen Stern bei kühlen Temperaturen zu erhalten, wo er dann nach 1.4 auch bliebe, hat man wegen der niedrigeren Massenkoordinate der Schalenquelle das Problem, daß die kühlen bis sehr kühlen RCBs oder HdCs wegen der auch um einen Faktor 5 längeren Lebensdauer nahe der Hayashi-Linie in der Überzahl sein müßten. Tatsächlich ergibt sich für RCBs höchstens ein Faktor 2.

Daraus schließe ich, daß RCBs aus Sternen auf dem Asymptotischen Riesenast entstanden sind, wobei die Heliumschalenquelle bereits bei $q \approx 0.9$ sein sollte. Ob nun die Wasserstoffhülle vollständig verbrannt wurde ("hot bottom burning" - die Wasserstoffkonvektionszone erstreckt sich bis in die Schalenquelle - in diesem Fall läßt sich aber das hohe $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ -Verhältnis nicht erklären), oder die Wasserstoffhülle einschließlich der Schalenquelle abgestoßen oder abgeblasen wurde (Schönberner 1983)*, läßt sich so nicht sagen. Im letzten Fall ließe sich der erhöhte Kohlenstoffgehalt der Helium-Hülle, also der früheren Schicht zwischen den Schalenquellen durch ein Einschließen prozessierter Materie aus dem Helium-brennenden Gebiet erklären. Ein solcher Effekt könnte nach Deupree (1984) und Paczynski und Tremaine (1977) beim erstmaligen Zünden des Heliums in einem leicht entarteten Kern eines Sterns niedrigerer Masse ($M/M_{\odot} \leq 2$) stattfinden. Eine andere Möglichkeit - Mischen während eines Helium-Flashes in der Schalenquelle und Verlust der Hülle - wurde von Sackmann et al. (1974) angeregt.

* Kürzlich haben Faulkner und Wood (1985) von einem Mechanismus (Strahlungsdruck so groß, daß Gasdruck verschwinden muß) berichtet, der ein Abblasen der wasserstoffreichen Hülle ermöglichen würde. Das Resultat wäre ein Helium-Stern mit einer Masse von $0.85 M_{\odot}$, die also genau in dem von mir gefundenen Bereich liegt.

3.7. Verdunkelungen

Mittlerweile ist man sich einig, daß die die RCBs verdunkelnde Materie vom Stern selbst ausgestoßen werden muß, um z. B. die Asymmetrie der Lichtkurve oder die fehlende Korrelation zwischen visueller und infraroter Helligkeit zu erklären (s. Pugach 1984). Damit stellt sich die Frage, ob dieses Abstoßen von Materie mit den beobachteten Pulsationen zusammenhängen kann. Goncharova et al. (1983) finden, daß eine der Moden ($\Pi = 39.36d$), aus denen die Schwingung von RCB bestehen soll, mit den Verdunkelungen synchronisiert ist. Eine Antwort kann aber nur mit Hilfe von nicht-linearen Rechnungen gegeben werden, die auch die Amplituden und Geschwindigkeiten der äußersten Schichten des Sterns liefern würden. Beispielsweise fanden Perdang und Blacher (1982) bei nicht-linearen Rechnungen chaotische Oszillationen, die sich durch einigermaßen konstante Perioden, aber statistisch schwankende Amplituden auszeichnen. Wenn also eine kritische Amplitude besteht, so daß Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage, die größer als diese sind, zu einer Loslösung aus dem Gravitationspotential führen, kann man direkt die statistische Wiederkehrzeit für die daraus folgenden Verdunkelungen berechnen. Diese Rechnungen sind natürlich noch weit von realistischen Sternpulsationen entfernt, doch zeigen sie, daß prinzipiell chaotisches, oder statistisches Verhalten aus fast-periodischen Pulsationen folgen kann.

In unseren Modellen kann im Rahmen der Mischungswegtheorie die Geschwindigkeit der konvektiven Elemente berechnet werden. Innerhalb der Dichteinversion werden Geschwindigkeiten bis nahe an die Schallgeschwindigkeit ($\sim 95\%$) erreicht. In Wechselwirkung mit der Pulsation sind damit Überschallgeschwindigkeiten und Schockfronten denkbar, die ebenfalls zu einem Abblasen von Materie führen können.

Der genaue Mechanismus der Staubkondensation ist ebenfalls noch unbekannt. Um nämlich eine sichtbare Verdunkelung hervorzurufen, müssen die Staubteilchen relativ nahe an der Sternoberfläche kondensieren. Bei R CrB und RY Sgr aber ist die Temperatur zu hoch, um dies bei chemischem Gleichgewicht zu erlauben. Dazu wären Temperaturen um 1000 K notwendig. Nur Kondensation ohne Gleichgewichtsverhältnisse wäre denkbar.

3.8. Massenverlust

Obwohl die Verdunkelungen und die Beobachtungen zirkumstellarer Hüllen (Walker 1985) direkt auf Massenverlust deuten, der aber sehr gering ist, und bei unter $10^{-8} M_{\odot}/a$ liegen dürfte, ist keine Beobachtung eines ständigen Massenverlusts bekannt. Die in 1.5 durchgeführten Testrechnungen mit Verlusten nach der Reimers-Formel zeigten, daß die Leuchtkräfte bei fester Masse niedriger waren als ohne Massenverlust. Dadurch verschiebt sich das blaue Ende des Instabilitätsstreifens nach rechts, und die Modelle werden bei tieferen Temperaturen stabil. Daraus (2.3.3) läßt sich schließen, daß der Parameter η in der Reimers-Formel höchstens von der Größenordnung 1 sein dürfte, was bei $T_{\text{eff}} = 7000$ zu $\dot{M} = 10^{-7} M_{\odot}/a$ führt. In Konsistenz mit den fehlenden Beobachtungen läßt sich also zumindest sagen, daß Massenverlust bei RCBs geringer ist als nach der Reimers-Formel, bzw. überhaupt nicht vorliegt.

Da die beobachteten Pulsationsperioden der kühleren RCBs systematisch niedriger zu sein scheinen als die theoretischen, läßt sich dies als Indiz für ständigen Massenverlust deuten, da die theoretischen Perioden der Modelle mit Massenverlust ebenfalls kürzer sind.

4. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde untersucht, welche Sternmodelle man bei richtiger chemischer Zusammensetzung in das Gebiet der beobachteten RCB-Sterne entwickeln kann. Für die Resultate war von besonderer Bedeutung, daß es mit Hilfe der Astrophysical Opacity Library möglich ist, zu vorgegebener Chemie (in unserem Fall also fehlender Wasserstoff, überwiegender Heliumanteil, sowie deutliche Kohlenstoffanreicherung bei gleichzeitig normalen Häufigkeiten der restlichen Elemente) eine in Bezug auf das Rosseland-Mittel richtige Opazitäten-Tabelle zu erhalten. Damit wird die übliche, recht zweifelhafte Interpolation zwischen Tabellen vermieden. Außerdem waren die Tabellen dank der zusätzlichen Rechnungen von Hübner und Magee bis zu 3000 K herab konsistent und vollständig vorhanden, so daß auch die häufig angewandte Extrapolation bei tiefen Temperaturen vermieden wurde. Mit diesen neuen - und für RCBs wohl bisher besten - Opazitäten erhielten wir für den gesamten beobachteten Temperaturbereich (3000 K - 15000 K) Sternmodelle, die aus einem leicht entarteten Kohlenstoff-Sauerstoff-Kern, einer Helium brennenden Schalenquelle und einer Hülle der bekannten Zusammensetzung bestehen. Die Opazitäten stellen daher keinen Unsicherheitsfaktor in den Rechnungen dar, wie dies z.B. bei Biermann und Klippenhahn (1972) oder Trimble (1971) war. Die Hüllen der Modelle sind, im Gegensatz zu früheren Rechnungen außer bei den tiefsten Effektivtemperaturen nicht vollkonvektiv, sondern größtenteils radiativ mit ein bis zwei stark überadiabatischen Konvektionszonen, wobei die Existenz der weiter innen gelegenen, dünneren unsicher ist. Die andere tritt mit der Heliumionisation auf.

RCBs mit Effektivtemperaturen über etwa 5000 K sind Sterne, die sich bereits wieder bei fast konstanter Leuchtkraft vom Gebiet der Roten Riesen zu höheren Temperaturen hin entwickeln. Die Aufenthaltsdauer auf diesem Zweig beträgt ca. 5000-10000 Jahre. Die kühleren Sterne können sich, je nach Masse, im selben Stadium befinden, bzw. noch auf dem anstehenden Ast sein. Dort ist die Lebensdauer bis zu fünfmal größer. Für die letztere Möglichkeit sprächen die niedrigeren Leuchtkräfte der kühleren RCBs und ihre Häufigkeit gegenüber den heißeren. Die Massen der RCBs liegen nach unseren Ergebnissen zwischen $0.8 \leq M/M_{\odot} \leq 0.9$. Eine gewisse Unsicherheit besteht am unteren Ende dieses Bereichs wegen der Empfindlichkeit der Modelle gegen die genauen Brennprozesse ($^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Raten) in der Schalenquelle. Der Ursprung der RCBs ist mit einiger Sicherheit nicht im Verschmelzen von Weißen Zwergen, sondern in drastischen Prozessen der Hülle von AGB-Sternen zu suchen.

Die gleichen Modelle wurden auch auf Stabilität gegen radiale Pulsationen untersucht. Es stellt sich heraus, daß eine instabile Schwingung existiert, die für die meisten Modelle angeregt ist, und etwa - wenn man diese Bezeichnung wagen will - der Grundschiwingung entspricht. Das kühle Ende ihres Instabilitätsstrefens wird von RCBs nicht erreicht, möglicherweise aber von HdC-Sternen. Das heiße Ende hängt stark von Masse und Leuchtkraft ab. Bei fester Masse reicht der Instabilitätsstreifen bei niedrigeren Leuchtkräften etwa bis 7000-8000 K, und über einer kritischen Leuchtkraft bis 10000-15000 K. Für den untersuchten Massenbereich schneidet diese Ausdehnung des Streifens genau das RCB-Gebiet. Aus diesem (günstigen) Umstand ergeben sich mehrere Anwendungsmöglichkeiten:

Der mögliche Massenverlust der RCBs kann von theoretischer Seite begrenzt werden. Er liegt unter der Verlustrate, die die Reimers-Formel bei $\eta = 1$ liefert, und ist für die kühleren RCB eher wahrscheinlich (Perioden tiefer).

Eine RCB-Entwicklung, die auf oder nahe (d.h. Schalenquelle bei $M_r/M \leq 0.7$) der "RCB-Hauptreihe" beginnt, kann aufgrund der Ergebnisse der Pulsationsrechnungen ausgeschlossen werden.

Alle kühlen RCBs sollten pulsieren. Ebenso mindestens einige HdCs ($\pi = 400d$) und extreme Helium-Sterne.

Fehlende Pulsationen bei den extremen Helium-Sternen lassen sich mit etwas höheren Massen erklären. Dies könnte auch Rückschlüsse auf die etwas unterschiedliche Verteilung in der galaktischen Ebene zulassen.

Da alle bekannten RCBs Einzelsterne sind, läßt sich ihre Masse nicht direkt aus Beobachtungen wie bei Doppelsternsystemen bestimmen. Die hier angewandten Methoden zur theoretischen Bestimmung der Masse (Entwicklungsrechnungen und Pulsationsrechnungen) ergaben übereinstimmend eine typische Masse von $0.85 \pm 0.05 M_{\odot}$. Die von dritter Seite (Faulkner und Wood 1985) bestimmte Masse aus einem möglichen Entstehungsmechanismus ergibt denselben Wert.

Zur Klärung der offenen Fragen (Ursprung, Verdunkelungen, Pulsationsamplituden) sind auf theoretischer Seite folgende Dinge zu tun:

- Entwicklungsrechnungen mit genauer Behandlung der Kernprozesse, nicht-lokaler und zeitabhängiger Konvektionstheorie (Stoßfronten durch Konvektion)
- Nichtlineare Pulsationsrechnungen der hier gefundenen Modelle (im Sinne von Perdang und Blacher 1982)
- Kondensationsmechanismen

Durch Beobachtungen müssen folgende Fragen geklärt werden:

- genaue Bestimmung der Leuchtkräfte (Einschränkung auf die höheren Werte wünschenswert) und Effektivtemperaturen (höhere Temperaturen bei den kühlen Modellen ?) zur exakten Festlegung von Entwicklungszustand, Masse und Instabilitätsstreifen.
- Suche nach Pulsationen weiterer RCBs (vor allem XX Cam), insbesondere der kühlen, und genaue Bestimmung der Perioden.

Obwohl nur ein verschwindender Teil aller Sterne RCBs sind (ca. 10^{-9}) stellen sie wegen der Fülle der ungeklärten Frage auch weiterhin eine Herausforderung an unser Verständnis von der Entwicklung der Sterne dar. Alles, was man über die RCBs lernt, kann auch auf die unterschiedlichsten anderen Typen von Sternen (HdCs, extreme Helium-Sterne, Zentralsterne, Planetarischer Nebel, Weiße Zwerge, Supernovae I, ...) angewandt werden.

5. Anhang

5.1. Anhang A - Ableitungen thermodynamischer Größen

Bei der Berechnung der Ableitungen der Gleichungen (1.9) und (1.11) benötigt man unter anderem auch die von ∇_{ad} und darin (s. (1.10)) die von c_p und δ . Diese werden im folgenden hergeleitet. Dabei wird Bezug genommen auf Appendix A aus Baker und Klippenhahn (1962) (BK62):

Deren Gleichung A27 lautet

$$c_p = \frac{R}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)(4+\beta)}{\beta^2} \right] (1+E) + \sum_i \frac{\nu_i}{G_i} \phi_i^2 \right\} \quad (5.1)$$

und A26

$$\delta = \frac{4-3\beta}{\beta} + \frac{1}{1+E} \sum \frac{\nu_i \phi_i}{G_i} \quad (5.2)$$

Dabei sind außer den bekannten Größen

$$G_i = \frac{1}{y_i(1-y_i)} + \frac{\nu_i}{E(1+E)} \quad (5.3)$$

$$\phi_i = \frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)}{\beta} + \frac{x_i}{\kappa T} \quad (5.4)$$

definiert, wo $y_i^r = \sum_{s=r+1}^{M_i} x_i^s$ den Anteil von Atomen der Sorte i in Ionisationszuständen höher als r (bis maximal M_i) sind, aber die Unterscheidung zwischen Atomsorten fallengelassen wird, und wir nur noch y_i betrachten ($i = 1, 9$ in unserem Fall). Die Ableitungen von β nach den Variablen $\ln P$ und $\ln T$ (,die im Programm tatsächlich anstelle von T und P verwendet werden) sind trivial, sie lauten

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial \ln T} \right)_P = -4(1-\beta) ; \quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial \ln P} \right)_T = 1-\beta \quad (5.5)$$

Ab jetzt lassen wir das Subskript für die konstante Größe fallen.

Außerdem kann man (s. A14 von BK62) leicht ausrechnen

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T} =: \mu_T = - \frac{1}{1+E} \left(\frac{\partial E}{\partial \ln T} \right); \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P} =: \mu_P = - \frac{1}{1+E} \frac{\partial E}{\partial \ln T} \quad (5.6)$$

Damit können in (5.1) und (5.2) alle Größen bis auf die G_i (v_i ist ja konstant) berechnet werden. In den Ableitungen der G_i treten solche der y_i auf, die wieder als Funktionen bekannter Größen ausgedrückt werden können.

Sei jetzt $D := 1+E$ und a' die Ableitung einer Größe a nach $\ln P$ oder $\ln T$. Dann gilt (unter Verwendung von A24)

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= - \frac{4\beta'}{\beta^2} + \frac{1}{D} \sum v_i \left(\frac{1}{G_i} \phi_i' - \frac{1}{G_i^2} G_i' \phi_i \right) - \frac{1}{D^2} D' \sum v_i \frac{\phi_i}{G_i} = \\ &= - \frac{4\beta'}{\beta^2} + \frac{1}{D} \sum v_i \frac{\phi_i}{G_i} \left(\frac{\phi_i'}{\phi_i} - \frac{G_i'}{G_i} \right) + \mu_T \frac{D'}{D} = \\ &= - \frac{4\beta'}{\beta^2} + \frac{1}{D} \sum v_i \frac{\phi_i}{G_i} \left(\frac{\phi_i'}{\phi_i} - \frac{G_i'}{G_i} \right) + \mu_T (\ln \mu)' \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\phi_i' = - \frac{4\beta'}{\beta^2} - \frac{1}{T^2} \frac{x_i}{k} T \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} G_i' &= \frac{-1}{y_i(1-y_i)} \left[\frac{1}{y_i} - \frac{1}{1-y_i} \right] y_i' - \frac{v_i}{ED} \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right] E' = \\ &= \frac{y_i'}{y_i(1-y_i)} \left[\frac{1}{1-y_i} - \frac{1}{y_i} \right] + (\ln \mu)' \frac{v_i}{E} \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right] = \\ &= \frac{2y_i-1}{y_i^2(1-y_i)^2} \cdot y_i' + (\ln \mu)' \frac{v_i}{E} \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Damit brauchen wir in (5.7), (5.8) und (5.9) bei Ableitung nach $\ln T$ nur noch zu setzen:

$$y_i' = \frac{\phi_i}{G_i} \quad (\text{A22 von BK62})$$

$$(\ln \mu)' = \mu_T$$

$$\beta' = -4(1-\beta)$$

$$T' = T$$

und bei Ableitung nach $\ln P$

$$y_i' = - \frac{1}{\beta G_i} \quad (\text{A22})$$

$$(\ln \mu)' = \mu_P$$

$$\beta' = 1 - \beta$$

$$T' = 0$$

Mit diesen Ergebnissen lassen sich dann also die Ableitungen von δ (5.7) ebenso wie die von c_P (aus (5.1)) berechnen, womit $\nabla_{ad} = \frac{D}{\beta} \delta \mathfrak{K} / c_P \mu_0$ und U (nach (1.10)) differenziert werden können. Damit sind dann die Ableitungen der Gleichungen (1.9) und (1.10) nach $\ln P$ und $\ln T$ bekannt.

5.2 Anhang B - Arbeitsintegral bei komplexer Frequenz ω

Wir beginnen mit Gleichung A5 bzw. A6 aus Baker und Gough (1979) ("BG 79"):

$$4\pi \frac{\omega^I}{\omega^R} \left(\frac{1}{2} \omega^R r_0^2 |x|^2 \right) = - \left\{ \frac{d}{dM_r} \left[4\pi^2 P_0 r_0^3 \operatorname{Im}(p^* x) \right] + \pi \frac{P_0}{\rho_0} \operatorname{Im}(p^* \tilde{\rho}) \right\} \quad (5.10)$$

Dabei ist $\tilde{\rho} = \rho_1/\rho_0$, und ρ_1 die Störung am Gleichgewichtswert der Dichte, also $\rho = \rho_0 + \rho_1$.

Der Term in eckigen Klammern von (5.10) ist das in Anhang C von Baker und Kippenhahn (1962) ("BK62") W genannte Arbeitsintegral. Falls also $\omega^I = 0$, so folgt aus (5.10) sofort

$$\frac{dW}{dM_r} = -\pi \frac{P_0}{\rho_0} \operatorname{Im}(p^* \tilde{\rho}),$$

das ist Gleichung C8 aus B462, und der alte Fall für die Berechnung des Arbeitsintegrals.

Die einzelnen Terme in (5.10) werden in BG79 wie folgt gedeutet: Die linke Seite ist im Fall $\omega^I \ll \omega^R$ gerade der Zuwachs an kinetischer Energie pro Zyklus für ein Massenelement. Der erste Term der rechten Seite ist so etwas wie der Fluß mechanischer Energie durch die betrachtete Schale, der zweite ein Quellterm, der also die vom Element geleistete Arbeit beschreibt. Integriert man (5.10) über die Hülle (also von M_B bis M), so erhält man A7 von BG79.

$$\frac{\omega^I}{\omega^R} = \frac{-4\pi^2 P_0 r_0^2 \operatorname{Im}(p^* x) - \pi \frac{P_0}{\rho_0} \int_{M_B}^M \operatorname{Im}(p^* \tilde{\rho}) dM_r}{4\pi \int_{M_B}^M \frac{1}{2} \omega^R r_0^2 |x|^2 dM_r} \quad (5.11)$$

Der erste Term im Zähler verschwindet gegen den zweiten (BG79). Tatsächlich ist das Verhältnis (numerisch getestet) etwa 10^{-35} . Wir vernachlässigen ihn daher in der weiteren Betrachtung.

Das differentielle Arbeitsintegral w wird definiert als

$$w = -\pi \frac{P_0}{\rho_0} \operatorname{Im} (p^* \tilde{p}) \left(-\frac{dM}{d \ln P_0} \right) / \int_{M_B}^M \frac{1}{2} \omega^2 r_0^2 |x|^2 dM_r \quad (5.12)$$

Wir setzen jetzt $dM_r/d \ln P_0$ aus (1.1) ein, und schreiben auch den Nenner als Integral über $d \ln P_0$ von $\ln P_B$ (unterer Gleichgewichtswert von P) bis $\ln P_s$ (oben)). Dann erhalten wir

$$w = 4\pi^2 \frac{P_0^2}{\rho_0} \frac{r_0^4}{GM_r} \operatorname{Im} (p^* \tilde{p}) / \int_{\ln P_B}^{\ln P_s} \left[-\frac{2\pi r_0^6 P_0}{GM_r} \omega^2 |x|^2 \right] d \ln P_0 \quad (5.13)$$

Außerdem gilt $\tilde{p} = \alpha p - \delta v$ und damit wird

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} (p^* \tilde{p}) &= p^R (\alpha p^I - \delta v^I) - p^I (\alpha p^R - \delta v^R) = \\ &= p^I \delta v^R - p^R \delta v^I = \delta \operatorname{Im} (p v^*), \end{aligned}$$

so daß wir für w die im Programm verwendete Form erhalten:

$$w = 4\pi^2 \frac{P_0^2}{\rho_0} \frac{r_0^4}{GM_r} \delta \operatorname{Im} (v^* p) / \int_{\ln P_s}^{\ln P_B} \frac{2\pi r_0^6 P_0}{GM_r} \omega^2 |x|^2 d \ln P_0 \quad (5.14)$$

Wegen (5.11) und der Definition von w sollte also gelten:

$$(-\eta) = \frac{w^I}{w^R} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\ln P_s}^{\ln P_B} w d \ln P_0 \quad (5.15)$$

Diese Beziehung wurde numerisch einmal mit der Sehnen-Trapezregel und einmal mit einer besseren, auf Splines basierenden Integrationsroutine aus einer mathematischen Programmbibliothek getestet. Für Moden mit wenigen Knoten stimmten die beiden Seiten von (5.15) bis auf wenige Prozent überein. Für höhere Moden differieren sie stärker, doch wird das auf die mangelnde Integral-Genauigkeit an den Knoten zurückgeführt.

5.3. Anhang C - Pulsationsrechnungen für ein Gitter von Modellen

Da wegen der nuklearen Vorgeschichte der RCBs und der unsicheren Schalenquellenstruktur ($^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ -Rate) ein gewisser Spielraum in den Parametern Masse und Leuchtkraft besteht, wurden diese sowie Effektivtemperatur und chemische Zusammensetzung variiert und für jede Kombination eine Pulsationsrechnung durchgeführt. Dadurch wird sowohl Anschluß an entsprechende Rechnungen von Saio et al. (1984) für $M/M_{\odot} = 1, 2, 3$ erreicht, als auch verdeutlicht, wie z.B. das blaue Ende des Instabilitätstreifens von Masse und Leuchtkraft abhängt. Da wir es mit vier Parametern zu tun haben, wurden jeweils nur wenige Werte gewählt:

$M/M_{\odot} =$	0.80, 0.85, 0.90
$T_{\text{eff}} =$	4000, 7000, 10000, 13000 K
$L/L_{\odot} =$	8000, 12000, 16000, 20000
Mischungen	R1 und R2

Tabelle 11

Perioden mit Stabilitätskoeffizienten für ein Gitter von Modellen verschiedener Massen, Leuchtkräfte und Effektivtemperaturen. Die obere Zahl bezeichnet jeweils die Periode Π in Tagen, die untere den Stabilitätskoeffizienten μ .

a) Mischung R1

 T_{eff}

	4000	7000	10000	13000
$M/M_{\odot}=0.800$				
$L/L_{\odot}=8000$	378.891 0.6767	20.577 -0.0460	7.313 -0.0543	2.177 -0.0306
12000	380.249 0.6725	28.528 0.1578	9.977 -0.0182	2.752 -0.0598
16000	375.439 0.6396	35.829 0.2635	11.020 0.0541	2.664 -0.0302
20000	373.581 0.6076	43.815 0.3106	13.199 0.2849	3.3042 -0.0089
$M/M_{\odot}=0.850$				
8000	418.502 0.6802	19.697 -0.0800	7.049 -0.0641	2.112 -0.0344
12000	390.983 0.6795	28.803 0.1090	9.781 -0.0324	2.774 -0.0239
16000	386.400 0.6494	34.501 0.2459	11.274 0.0300	2.559 -0.0359
20000	389.102 0.6221	42.554 0.2980	12.319 0.2392	3.182 -0.0174
$M/M_{\odot}=0.900$				
8000	373.793 0.6192	18.912 -0.1004	6.805 0.0535	2.048 -0.0378
12000	401.430 0.6730	26.914 0.0777	9.540 -0.0446	2.754 -0.0234
16000	384.866 0.6665	33.802 0.2183	11.349 0.0103	2.465 -0.0422
20000	397.743 0.6368	40.840 0.2904	11.472 0.1713	3.063 -0.0299

b) Mischung R2

 T_{eff}

	4000	7000	10000	13000
$M/M_{\odot}=0.800$				
$L/L_{\odot}=8000$	238.523	20.079	7.203	2.178
	0.4835	0.0121	-0.0538	-0.0259
12000	262.514	28.352	9.463	2.544
	0.4533	0.1933	-0.0144	-0.0439
16000	275.587	36.440	10.544	2.717
	0.3301	0.2389	0.2347	-0.0215
20000	289.698	46.084	14.151	3.304
	0.3159	0.2006	0.3306	0.0298

 $M/M_{\odot}=0.850$

8000	240.791	19.202	6.958	2.124
	0.4947	-0.0247	-0.0554	-0.0298
12000	268.992	27.339	9.389	2.617
	0.4617	0.1698	-0.0262	-0.0512
16000	275.420	35.203	9.888	2.616
	0.4296	0.2388	0.0294	-0.0271
20000	287.572	43.897	13.361	3.179
	0.3533	0.2219	0.3127	0.0012

 $M/M_{\odot}=0.900$

8000	242.2467	18.431	6.728	2.067
	0.4789	-0.0502	-0.0549	-0.0335
12000	272.827	26.389	9.241	2.663
	0.4716	0.1399	-0.0400	-0.0237
16000	276.327	34.081	10.374	2.523
	0.4585	0.2326	0.0182	-0.0320
20000	302.196	42.076	12.396	3.095
	0.3557	0.2396	0.2881	-0.0134

Verzeichnis der Symbole

a	Strahlungskonstante: $a = 4\sigma/c$
c	Lichtgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärme pro Gramm (bei konstantem Druck)
G	Gravitationskonstante
L	Leuchtkraft
L_r	in Kugel mit Radius r erzeugte Leuchtkraft
$L_\odot$	Leuchtkraft der Sonne
m_v	scheinbare visuelle Helligkeit
M	Gesamtmasse
M_{Bol}	absolute bolometrische Helligkeit
M_r	Masse in einer Kugel vom Zentrum bis zum Radius r
M_v	absolute visuelle Helligkeit
$M_\odot$	Masse der Sonne
P	Druck
q	$= M_r/M$; relative Masse einer Kugel mit Radius r
q_0	q an der Stelle des Sprunges in der chemischen Zusammensetzung (Abschnitt 1.6)
r	Radius vom Zentrum des Sterns
R	Sternradius
$R1, R2, RC$	spezielle chemische Zusammensetzungen, in Abschnitt 1.2.4.1 definiert
S	Entropie
t	Zeit
T	Temperatur
T_{eff}	Effektivtemperatur
X	Gewichtsanteil des Wasserstoffes
X_C	Gewichtsanteil des Kohlenstoffs
X_O	Gewichtsanteil des Sauerstoffs
Y	Gewichtsanteil des Heliums
Z	Gewichtsanteil aller Elemente schwerer als Sauerstoff
β	Verhältnis Gasdruck zu Gesamtdruck
ϵ	nukleare Energieerzeugungsrate pro Masseneinheit
ρ	Dichte
μ	Molekulargewicht
κ	Rosseland-Mittel der Opazität
Π	Periode (in Tagen)

ψ	Entartungsparameter
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante; in Abschnitt 2 auch komplexe, dimensionslose Frequenz
τ	optische Tiefe
ω	komplexe Frequenz
∇	$\frac{d \ln T}{d \ln P}$
∇_{ad}	∇ bei adiabatischer Schichtung
∇_{conv}	∇ in konvektiven Bereichen
∇_r	∇ bei reinem Strahlungstransport: $\nabla_r = \frac{3\kappa_L P}{16\pi acGM_r T^4}$

Alle Größen sind im cgs-System zu verstehen, soweit nicht anders erwähnt. Perioden werden in Tagen, Entwicklungszeiten in Jahren angegeben. Nicht aufgeführte Symbole werden im Text an der entsprechenden Stelle erklärt. M und L sind stets in Einheiten der Sonnenmasse und -leuchtkraft zu verstehen.

Literatur:

- Alexander, D.R., Johnson, H.R., und Rypma, R.L.: 1983, *Astrophys. J.* 272, 773
- Alexander, J.B., Andrews, P.J., Catchpole, R.M., Feast, M.W., Lloyd Evans, T., Menzies, J.W., Wisse, P.N.J. und Wisse, M.: 1972, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 158, 305
- Allen, C.W.: 1973, *Astrophys. Quantities*, 3rd ed. (London, Athlone)
- Andrews, P.J., Catchpole, R.M., Feast, M.W., Jones, D.M.P., Lloyd Evans, T., und Walker, E.N.: 1967, *Inf. Bull. Variable Stars* No. 235
- Baker, N.H. und Gough, D.O.: 1979, *Astrophys. J.* 234, 232
- Baker, N.H. und Klippenhahn, R.: 1962, *Z. f. Astrophys.* 54, 114
- Baker, N.H. und Klippenhahn, R.: 1965, *Astrophys. J.* 142, 868
- Bateson, F.M.: 1965-1972, *Circ. Roy. Astron. Soc. N.Z. Var. Star Sec.* No. 120-195
- Publ. Roy. Astron. Soc. N.Z. Var. Star Sec. No. 1-4
- Berman, L.: 1935, *Astrophys. J.* 81, 369
- Bidelmann, W.P.: 1948, *Astrophys. J.* 107, 413
- Bidelmann, W.P.: 1953, *Astrophys. J.* 117, 25
- Biermann, P. und Klippenhahn, R.: 1971, *Astron. Astrophys.* 14, 32
- Böhm-Vitense, E.: 1958, *Z. Astrophys.* 46, 108
- Böhm-Vitense, E.: 1981, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 19, 295-318
- Clayton, D.D.: 1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, New York, Mc Craw-Hill
- Cottrell, P.L. und Lambert, D.L.: 1982, *Astrophys. J.* 261, 595
- Cox, A.N. und Stewart, J.N.: 1965, *Astrophys. J. Suppl.* 94
- Cox, A.N. und Stewart, J.N.: 1970, *Astrophys. J.* 19, 261
- Cox, J.P., King, D.S., Cox, A.N., Wheeler, J.C., Hansen, C.J., und Hodson, S.W.: 1980, *Space Science Reviews* 17, 529
- Delgado, A.J. und Thomas, H.-C.: 1981, *Astron. Astrophys.* 36, 142
- Deupree, R.G.: 1984, *Astrophys. J.* 287, 268
- Dürrbeck, H.W. und Seitter, W.C.: 1982, in Meyer-Hofmeister (1982)
- Drilling, J.S., Schönberner, D., Heber, U., Lynas-Gray, D.E.: 1984, *Astrophys. J.* 278, 224
- Eggen, O.J.: 1965, *Observatory* 85, 191
- Faulkner, D.J. und Wood, P.R.: 1984, *Proc. Austr. Soc. Ast.* 5, (4), 543
- Faulkner, D.J. und Wood, P.R.: 1985, *Proc. Austr. Soc. Ast.* 6, (1), 62
- Feast, M.W.: 1972, *Monthly Notices Roy. astr. Soc.* 158, 11p

- Feast, M.W.: 1975, in Sherwood and Plant (eds.): Variable Stars and Stellar Evolution, IAU Symposium 67 (Dordrecht, Reidel), 129-141
- Fernie, J.D., Sherwood, U. und Du Puy, D.L.: 1972, *Astrophys. J.* 172, 383
- Goncharova, R.I., Koval'chuk, G.U., und Pugach, A.F.: 1983, *Astrofisika* 19, 279
- Habets, G.M.H.J.: 1985, Dissertation, Amsterdam
- Harpaz, A.: 1984, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 210, 633
- Henney, L.G., Forbes, J.E., Gould, N.L.: 1964, *Astrophys. J.* 139, 306
- Herbig, G.: 1949, *Astrophys. J.* 110, 143
- Hubbard, W.B., Lampe, M.: 1969, *Astrophys. J. Suppl.* 18, 297
- Hübner, W.F.: 1979, in Meyer-Hofmeister (1982), pers. Mitteilung
- Hübner, W.F.: 1984, pers. Mitteilung
- Hübner, W.F. und Magee, N.H., Jr.: 1983, pers. Mitteilung
- Hübner, W.F., Merts, H.L., Magee, N.H., Jr. und Argo, M.F.: 1977, Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA 6760 M
- Hunger, K.: 1985 in Problems in Stellar Atmospheres and Envelopes, hersg. Baschek, B., Kegel, W.H., Treving, G., Berlin, Springer, S. 57
- Iben, I., Jr. und Renzini, A.: 1983, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 21, 171
- Iben, I., Jr. und Tutukov, A.V.: 1985, *Astrophys. J. Suppl.* 58, 661
- Jacchia, L.: 1933, *P. Oss. Ast. U. Bol.* 2, 173
- Johnson, H.R.: 1984, in Cool stars with excesses of heavy elements, eds. Jaschek M. and Keenan, R.C., 1984, Dordrecht, Reidel, S. 171
- Kettner, K.U., Becker, H.W., Buchmann, L., Görres, J., Kräwinkel, H., Rofls, C., Schmalbroch, P., Trautvetter, H.P., und Vlücks, A.: 1982, *Z. Phys. A. - Atoms and Nuclei* 308, 73
- Kilkenny, D.: 1982, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 200, 1019
- Kilkenny, D. und Flanagan, C.: 1983, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 203, 19
- Kilkenny, D. und Lynas-Gray, P.E.: 1982, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 200, 1019
- Kilkenny, D. und Whittet, D.C.B.: 1984, *Mon. Not. R. astr. Soc.* 208, 25
- King, D.S., Wheeler, W.C., Cox, J.P., Cox, A.N., und Hodson, S.W.: 1980, in Lecture Notes In Physics, No. 125, S. 161
- Kippenhahn, R.: 1962, Int. School of Physics "Enrico Fermi" 28th course, Varenna, S. 330 ff
- Kippenhahn, R. und Thomas, H.-C.: 1964, *Z. f. Astrophys.* 60, 19
- Kippenhahn, R., Weigert, A., Hofmeister, E.: 1967, *Methods in Computational Physics*, hersg. von B. Alder, S. Fernbach und M. Rotenberg, Academic Press, New York, London, Vol. 7, p. 129

- Kuhfuß, R.: 1986, *Astron. Astrophys.* 160, 116.
- Kukarkin, B.V., Khoplov, P.N., Efrenov, Y.N., Kukarkina, N.P.,
Kurochkin, N.E., Medvedeva, G.I., Perova, N.B., Fedorovich,
U.P., und Frolov, M.W.: 1969, *General Catalogue of Variable
Stars*, third edition and first supplement, Moscow.
- Lang, K.R.: 1980, *Astrophysical Formulae*, 2nd edition, Springer, Berlin
Heidelberg, New York
- Law, W.-Y.: 1982, *Astron. Astrophys.* 108, 118
- Loreta, E.: 1934, *Astron. Nachr.* 254, 151
- Ludendorff, H.: 1906, *Astron. Nachr.* 173, 1
- Maracco, H.G. und Milesi, G.E.: 1982, *Astron. J.* 87(2), 1774
- Meyer-Hofmeister, E.: 1982, in *Landolt-Börnstein: Numerical Data and
Functional Relationship in Science and Technology*, New Series, ed.
in chief K.-H. Hellwege, Group VI: Astronomy, Astrophysics, and
Space Research, Vol. 2: Astronomy and Astrophysics, Subvol. b,
Stars and Star Clusters, ed. K. Schelfers and H.H. Voigt, New
York, Springer-Verlag, S. 152
- O'Keefe, J.A.: 1939, *Astrophys. J.* 90, 294
- Paczynski, B.: 1971, *Acta Astron.* 21, 1
- Paczynski, B. und Tremaine, S.D.: 1977, *Astrophys. J.* 216, 57
- Perdang, J. und Blacher, S.: 1982, *Astron. Astrophys.* 112, 38
- Pigott, E.: 1796, *Phil. Trans.* 137
- Pugach, A.F.: 1984, *Astron. Zh.* 61, 491
- Reimers, D.: 1975, in *Problems in Stellar Atmospheres and Envelopes*, hersg.
Baschek, B., Kegel, W.H., Treving, G., Berlin, Springer, S. 229
- Ross, J.E. und Aller, H.A.: 1976, *Science* 191, 1223
- Sackmann, I.-J., Boothroyd, A.I.: 1985, *Astrophys. J.* 293, 154
- Sackmann, I.-J., Smith, R.J. und Despain, K.H.: 1974, *Astrophys. J.*
187, 555
- Saló, H. und Wheeler, J.C.: 1983, *Astrophys. J. L.* 272, L25
- Saló, H., Wheeler, J.C., und Cox, J.P.: 1984, *Astrophys. J.* 281, 318
- Schmidt, H.U.: 1965, *The Position of Variable Stars in the Hertzsprung-
Russell Diagramm*, Bamberg Coll. I.A.U.
- Schönberner, D.: 1975, *Astron. Astrophys.* 44, 383
- Schönberner, D.: 1977, *Astron. Astrophys.* 57, 437
- Schönberner, D.: 1981, *Astron. Astrophys.* 103, 119
- Schönberner, D.: 1983, *Astrophys. J.* 272, 708
- v. Sengbusch, K.: 1967, *Dissertation*, Göttingen
- Searle, L.: 1961, *Astrophys. J.* 133, 25

- Sharp, C.M.: 1981, Dissertation, University of St. Andrews, Scotland
- Shilyaev, B.E., Orlov, M.Y., Pugach, A.F.: 1978, Stars of type R CrB, Naukova Dumka, Kiev
- Späth, H.: 1973, Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen, München, Oldenbourg-Verlag
- Thomas, H.-C.: 1967, Z. f. Astrophys. 67, 420
- Torres, G., Milone, L.A. und Villada de Arnedo, M.M.: 1985, Astronom. J. 90, 680
- Totochawa, A.G.: 1973, Astron. Circ. (U.S.S.R.) 791, 7
- Trimble, V.: 1971, Mon. Not. R. astr. Soc. 156, 411
- Trimble, V. und Paczynski, B.: 1973, Astron. Astrophys. 22, 9
- Walker, E.N.: 1967, Info Bull. Variable Stars No. 235
- Walker, H.J.: 1985, Astron. Astrophys. 152, 58
- Warner, B.: 1967, Mon. Not. R. astr. Soc. 137, 119
- Weiß, A.: 1983, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München
- Wood, P.R.: 1976, Mon. Not. R. astr. Soc. 174, 531
- Wood, P.R. und Faulkner, D.J.: 1973, Astrophys. J. 181, 147

Danksagung

Zum Gelingen dieser Arbeit haben etliche Personen direkt oder indirekt beigetragen. Im folgenden danke ich all denen, an deren Unterstützung ich mich erinnern kann. Sollte ich jemanden vergessen, so bitte ich mir das nachzusehen.

Mein ganz besonderer Dank gilt Prof. R. Kippenhahn, meinen Doktorvater, der dieses Thema vorgeschlagen, die Arbeit und mich betreut und mir die Möglichkeit gegeben hat, sie am Institut für Astrophysik durchzuführen. Gleichfalls zu großem Dank verpflichtet bin ich Herrn Dr. H.-C. Thomas, der mir neben vielen anderen besonders mit dem Entwicklungsprogramm geholfen hat und durch zahllose Diskussionen wertvolle Anstöße vermittelte. Für die Überlassung der Opazitäten, deren Bedeutung für die Arbeit gar nicht hoch genug eingeschätzt werden kann, danke ich Herrn Dr. W F. Hübner und Dr. Magee, dafür, sie im IPP-Rechenzentrum verwendbar gemacht zu haben, Herrn R.G. Wolff. Für die Überlassung des Pulsationsprogrammes danke ich Herrn K. v. Sengbusch und Prof. N. Baker, letzterem auch für Diskussionen, Anregungen und Hilfe bei den Ergebnissen der Pulsationen.

Weiterhin haben mir durch Diskussionen Impulse vermittelt Herr und Frau Dr. Meyer, R. Kuhfuss, Dr. Ober, Dr. Spruit und Dr. Ritter.

Frau G. Wimmersberger hat etliche Diagramme gezeichnet, und Frau G. Kratschmann hat mit unendlicher Geduld meine Handschrift entziffert und das Manuskript ins Reine getippt. Auch Ihnen herzlichen Dank!

Zuletzt danke ich all denen, die die Arbeit im Institut so angenehm machen, so Dr. Hillebrandt, Dr. Schmidt, Frau Tettenborn, Herrn Paulsen und besonders P. Schneider.

von
Achim Weib
aus
Augsburg

8.8.1957	geboren in Augsburg
Sept. 63 - Juli 67	Besuch Volksschule an der Hallstraße, Augsburg
Sept. 67 - 26. Juni 76	Besuch Holbein-Gymnasium Augsburg (naturwissenschaftl. Zweig) Abschluß: Abitur
1.7.76 - 30.9.77	Wehrdienst
Wintersemester 1977/78 - Wintersemester 1982/83	Studium der Physik (Diplom) an der Ludwig- Maximilians-Universität (LMU) München
24.2.83	Diplom der Physik (theoretische Richtung, Note: gut; Wahlfach Mathematik); Das Thema der Diplomarbeit lautete: "Stationäre Sternmodelle und Eigenschaften verall- gemeinerter Hauptreihen" (Note: sehr gut); betreut von Prof. Dr. R. Kippenhahn, angefertigt am Max-Planck-Institut für Astrophysik, Garching
seit 1.3.83	Studium der Astronomie (Abschluß Promotion) an der LMU; Anfertigung der Dissertation am Max-Planck-Institut für Astrophysik; betreut von Prof. Dr. R. Kippenhahn

